



COPPE/UFRJ

EFEITOS DA QUANTIZAÇÃO EM *COMPRESSIVE SENSING* DE IMAGENS
COM MATRIZES DE AMOSTRAGEM DETERMINÍSTICAS

Marcio Pinto Pereira

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientadores: Eduardo Antônio Barros da Silva e Lisandro Lovisolo

Rio de Janeiro

Março de 2010

EFEITOS DA QUANTIZAÇÃO EM *COMPRESSIVE SENSING* DE IMAGENS
COM MATRIZES DE AMOSTRAGEM DETERMINÍSTICAS

Marcio Pinto Pereira

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO
ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE
ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA
ELÉTRICA.

Examinada por:

Prof. Eduardo Antônio Barros da Silva, Ph.D.

Prof. Lisandro Lovisolo, D.Sc.

Prof. Gelson Vieira de Mendonça, Ph.D.

Prof. Murilo Bresciani de Carvalho, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MARÇO DE 2010

Pereira, Marcio Pinto

Efeitos da Quantização em *Compressive Sensing* de
Imagens com Matrizes de Amostragem Determinísticas
/ Marcio Pinto Pereira. - Rio de Janeiro:
UFRJ/COPPE, 2010.

XII, 51 p.: il.; 29,7 cm.

Orientadores: Eduardo Antônio Barros da Silva
Lisandro Lovisolo

Dissertação (mestrado) - UFRJ/COPPE/Programa
de Engenharia Elétrica, 2010.

Referências Bibliográficas: p. 50-51.

1. *Compressive Sensing*. 2. Compressão de Imagens.
3. Quantização. I. da Silva, Eduardo Antônio Barros *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE,
Programa de Engenharia Elétrica. III. Título.

Dedicatória

A meu pai. Saudades.

A minha mãe, pelo eterno carinho, que sempre me impulsiona.

A minha esposa, por todo o incentivo enquanto desenvolvia este trabalho.

Agradecimentos

Aos professores Eduardo e Lisandro, pela paciência e orientação ao longo de todo o processo de confecção desta dissertação.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

EFEITOS DA QUANTIZAÇÃO EM *COMPRESSIVE SENSING* DE IMAGENS
COM MATRIZES DE AMOSTRAGEM DETERMINÍSTICAS

Marcio Pinto Pereira

Março / 2010

Orientadores: Eduardo Antônio Barros da Silva

Lisandro Lovisolo

Programa: Engenharia Elétrica

Nos últimos anos o estudo de *Compressive Sensing* (CS) ou Amostragem Compressiva atraiu a atenção da comunidade científica. As técnicas baseiam-se na reconstrução de sinais esparsos, usando muito menos medidas do que as necessárias para satisfazer o critério de Nyquist, através de diferentes abordagens, como a abordagem que se utiliza da minimização da norma l_1 . Usualmente, em *Compressive Sensing* são utilizadas matrizes de amostragem aleatórias, com as quais se chega a um desempenho bastante satisfatório em termos de reconstrução de sinais. Nesta dissertação investiga-se a utilização de matrizes determinísticas para a amostragem de imagens, visando melhorias no desempenho da reconstrução através da minimização da norma l_1 particularmente no caso em que as amostras são quantizadas. Os resultados experimentais obtidos mostram que a utilização de matrizes determinísticas trazem vantagem no desempenho da reconstrução do sinal, em relação a matrizes estatísticas quando as amostras estão quantizadas.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

EFFECTS OF QUANTIZATION ON COMPRESSIVE SENSING OF IMAGES
WITH DETERMINISTIC SENSING MATRICES

Marcio Pinto Pereira

March / 2010

Advisors: Eduardo Antônio Barros da Silva

Lisandro Lovisolo

Department: Electrical Engineering

In the past few years Compressive Sensing has attracted attention of the scientific community, due to its capability of reconstructing sparse signals, using far less measurements than necessary to satisfy the Nyquist criterion. This is accomplished through l_1 norm minimization. In Compressive Sensing one usually employs random measurement matrices that yield very good results. In this work, the use of deterministic sensing matrices is investigated, aiming at improving the performance of image reconstruction using l_1 norm minimization in the case of quantized measurements. Experimental results show that the use of deterministic sensing matrices provides a better reconstruction performance than the use of random ones in the case of quantized measurements and l_1 norm minimization.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Objetivo	2
1.2	Organização	2
2	<i>Compressive Sensing</i>	4
2.1	A Minimização da Norma l_1	7
2.2	Matrizes de Amostragem	13
2.3	Aplicação em Imagens	14
2.4	<i>Total Variation</i>	16
2.5	Quantização	16
2.6	Comparação Entre Resultados	17
3	Matrizes Determinísticas Maximamente Incoerentes com Transformadas Ortogonais	19
3.1	Implementação	19
3.2	O Conjunto Experimental	21
3.2.1	Parâmetros de Otimização do l_1 -Magic	21
3.2.2	Imagens	21
3.2.3	Transformadas	22
3.2.4	Métodos de Minimização	23
3.3	Resultados	23

4	O Caso Biortogonal	30
4.1	Expansão para o Caso Biortogonal	32
4.2	Resultados para o Caso Biortogonal	33
5	Conclusões	48
	Referências Bibliográficas	50

Lista de Figuras

2.1	Representação de um sinal esparso com amplo espectro	5
2.2	Amostragem - relação entre variáveis	6
2.3	Minimização da norma l_1	8
2.4	Soluções por minimização da norma l_1	11
2.5	Simulação de minimização da norma l_1 para diversos valores de M . .	12
2.6	Coerência entre bases	14
3.1	Imagens de Teste	22
3.2	$BR \times PSNR$ de Lena	26
3.3	$BR \times PSNR$ de Camera Man	27
3.4	$BR \times PSNR$ de Phantom	28
3.5	$BR \times PSNR$ de IWHF	29
4.1	$BR \times PSNR$ de Lena	36
4.2	$BR \times PSNR$ de Camera Man	37
4.3	$BR \times PSNR$ de Phantom	38
4.4	$BR \times PSNR$ de IWHF	39
4.5	$BR \times PSNR$ de Lena	40
4.6	$BR \times PSNR$ de Camera Man	41
4.7	$BR \times PSNR$ de Phantom	42
4.8	$BR \times PSNR$ de IWHF	43

4.9	$BR \times PSNR$ de Lena	44
4.10	$BR \times PSNR$ de Camera Man	45
4.11	$BR \times PSNR$ de Phantom	46
4.12	$BR \times PSNR$ de IWHF	47

Lista de Tabelas

3.1	Abordagens de amostragem e reconstrução - ortogonais	23
4.1	Abordagens de amostragem e reconstrução - biortogonais	33

Nomenclatura

bpp	<i>Bits Per Pixel</i>
BR	<i>Bitrate</i>
CS	<i>Compressive Sensing</i>
dB	<i>decibel</i>
DCT	<i>Discrete Cosine Transform</i>
DWT	<i>Discrete Wavelet Transform</i>
FRI	<i>Finite Rate of Innovation</i>
PSNR	<i>Peak Signal-to-Noise Ratio</i>
RIP	<i>Restricted Isometry Property</i>
TV	<i>Total Variation</i>
UUP	<i>Uniform Uncertainty Principle</i>

Não acredite em qualquer coisa simplesmente porque você escutou.

...

Mas após observação e análise, quando você descobre que qualquer coisa concorda com a razão e é condutiva ao bem e benefício de um e de todos, então aceite e viva para isso.

Siddartha Gautama, o Buda, Kalama Sutra 17:49

1

Introdução

O critério de Nyquist [1] é uma ferramenta valiosa para nos dar a certeza de realizar a amostragem de um sinal analógico com frequência suficiente para reconstruirmos exatamente o sinal que queiramos representar amostrado. O critério de Nyquist informa que para reconstruirmos perfeitamente um sinal amostrado, precisamos que a frequência de amostragem seja pelo menos 2 vezes maior do que a frequência máxima do sinal que está sendo amostrado. Este critério tem sido usado como ferramenta para estabelecer-se as frequências de amostragem mínimas de sinais analógicos desde a sua formulação.

Nos últimos anos outras abordagens tem sido utilizadas: um exemplo, em vez de ser dado o foco na frequência máxima do sinal, observa-se seus graus finitos de liberdade por unidade de tempo, ou taxa finita de inovação (*Finite Rate of Innovation* - FRI)[2]. O critério de Nyquist, passa a ser um caso específico de uma teoria mais geral, pois Nyquist imagina que os graus de liberdade de um sinal são seus harmônicos no domínio da frequência e informa as condições de amostragem e reconstrução perfeita, que estão relacionadas à frequência máxima do sinal. Com o método alternativo, mesmo sinais que não são limitados na frequência, como um trem de impulsos, podem ser amostrados e ter reconstrução perfeita, desde que algumas condições de amostragem sejam observadas. Podemos realizar a mesma

abordagem considerando qualquer outro grau de liberdade. No caso de um trem de impulsos, os graus de liberdade são a localização temporal e intensidade de cada impulso. Apesar do sinal não ser limitado na frequência, pode-se amostrá-lo e reconstruí-lo perfeitamente com frequência de amostragem proporcional ao número de impulsos do sinal.

Molda-se assim um novo paradigma, onde sinais podem ser amostrados e reconstruídos observando-se a informação que efetivamente o sinal carrega. Nyquist continua válido e útil, mas para determinados sinais, mostra-se um critério pessimista e ineficiente.

Outra abordagem [3] [4] [5] [6] [7], através de métodos de otimização convexa, procura as representações mais esparsas de sinais, em algum domínio em que ele possa ser representado de forma esparsa, para também quebrar o critério de Nyquist. Esta é chamada de *Compressive Sensing* (CS) e é o objeto de estudo desta dissertação. Ao longo do texto, CS será explorada para compressão de imagens impondo-se diversos graus de quantização e diferentes variantes da abordagem de CS serão pesquisadas, tendo seus desempenhos analisados e comparados.

1.1 Objetivo

Nesta dissertação, propõe-se funções para a realização da amostragem de forma a obter uma melhoria no desempenho da reconstrução dos sinais quantizados e amostrados através de técnicas de *CS*. Isto é, utiliza-se matrizes de amostragem determinísticas, relacionadas a transformadas ortogonais e biortogonais.

1.2 Organização

No Capítulo 2 discute-se os aspectos básicos de *CS*, fundamentando a teoria do método de amostragem e reconstrução. Através de um exemplo prático, é demonstrado o poder de CS e a teoria é comprovada.

No Capítulo 3 introduz-se a utilização de matrizes de amostragem determinísticas

maximamente incoerentes para a melhoria do desempenho da reconstrução do sinal quantizado. É demonstrado que a hipótese da utilização de matrizes de amostragem determinísticas maximamente incoerentes é válida e o desempenho é efetivamente superior.

No Capítulo 4 evoluímos de matrizes de medida maximamente incoerentes com transformadas ortogonais para matrizes maximamente incoerentes com transformadas biortogonais e comparamos seus desempenhos. Também é conseguido sucesso na melhoria do desempenho utilizando esta abordagem.

As conclusões são apresentadas no Capítulo 5.

*Pure mathematics is, in its way,
the poetry of logical ideas.*

Albert Einstein

2

Compressive Sensing

Em *Compressive Sensing*, conseguimos reconstruir sinais perfeitamente[3], com um número de amostras bem menor que aquele sugerido pelo critério de Nyquist, desde que algumas condições sejam satisfeitas. Como exatamente isso acontece ?

Pensemos em um sinal com a transformada DCT e sua representação no tempo conforme as Figuras 2.1a e 2.1b.

Se imaginarmos que a frequência de amostragem da representação discreta do sinal é 1024 Hz, implicitamente considera-se que o sinal é periódico com 0.5 s, com frequência máxima em 500 Hz. Nyquist nos diz que precisaríamos de uma frequência de amostragem de pelo menos 1000 Hz para amostrarmos o sinal no tempo e obtermos reconstrução perfeita, sem *aliasing*, a partir das amostras. Para um sinal periódico de 0.5 s precisaríamos de no mínimo 500 amostras.

Para este mesmo sinal podemos obter reconstrução perfeita com probabilidade muito próxima de 100% a partir de 45 amostras utilizando *Compressive Sensing*. A técnica envolve a procura por representações esparsas do sinal em algum domínio no qual o sinal é efetivamente esparso.

Classificamos como esparso, um sinal que tem representação através de poucas componentes. Se o sinal x tem K componentes não nulas, de N possíveis, define-se que ele tenha esparsidade K , que também é definida pela norma l_0 . Mais precisa-

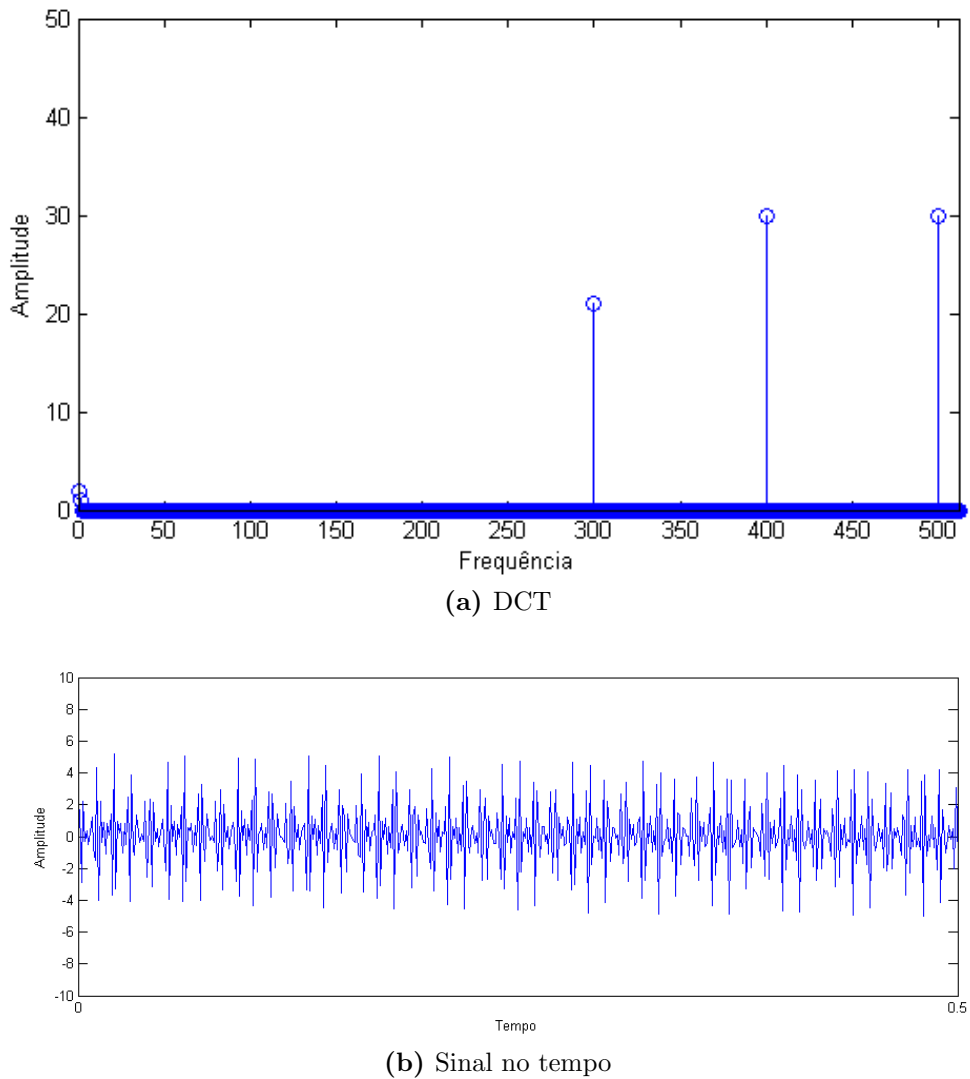


Figura 2.1: Representação de um sinal esparso com amplo espectro

mente:

$$K = \#\{i : x(i) \neq 0\} = \|x\|_0. \quad (2.1)$$

O sinal exemplificado na Figura 2.1a é um sinal esparso, pois tem apenas 5 componentes, dentre 512 possíveis.

Mais precisamente, definindo-se o sinal exemplificado anteriormente como um vetor x com N componentes e esparsidade K e Ψ uma transformação, com inversa $\bar{\Psi}$, que leva x a um domínio onde ele é esparso, que no exemplo é uma transformação DCT, tem-se:

$$x \in \mathbb{R}^N,$$

$$\Psi \in \mathbb{R}^{N \times N},$$

$$s := \Psi x. \quad (2.2)$$

A representação de x no domínio esparso é s . Para realizar-se a amostragem com M amostras, utiliza-se uma matriz de amostragem definida como Φ . Cada linha ϕ_m de Φ , é uma função de amostragem. As amostras coletadas, representadas pelo vetor y , são obtidas pelo produto de Φ com x . Ou:

$$y \in \mathbb{R}^M,$$

$$\Phi \in \mathbb{R}^{M \times N},$$

$$y := \Phi x = \Phi \bar{\Psi} s. \quad (2.3)$$

Reescrevendo $\Phi \bar{\Psi}$ como Θ , pode-se também definir:

$$\Theta \in \mathbb{R}^{M \times N},$$

$$y := \Phi x = \Phi \bar{\Psi} s = \Theta s. \quad (2.4)$$

E explicitando-se a relação de grandeza dentre a esparsidade K , o número de amostras M a o número de componentes do sinal N :

$$K \ll M \ll N$$

As Figuras 2.2a e 2.2b (editadas a partir de [4]) ilustram a relação entre as variáveis.

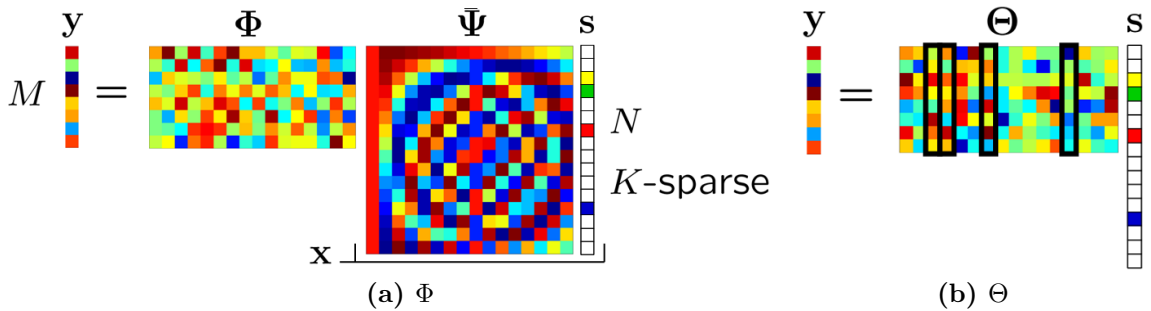


Figura 2.2: Amostragem - relação entre variáveis

Obtendo-se o vetor de amostras y a partir da Equação (2.4), como podemos reconstruir o sinal original? Para solucionar o problema, pode-se tirar partido da esparsidade do sinal x no domínio da DCT (s), e por algum método matemático, calcular-se um vetor \tilde{s} que tenha a maior esparsidade possível, ou seja, o menor número de componentes, e que também consiga satisfazer à condição do produto Θs ser igual a y .

Mais precisamente, definido-se a solução mais esparsa como \tilde{s} , seria necessário resolver a minimização:

$$\min_{\tilde{s}} \|\tilde{s}\|_0, \text{ sujeito a } \Theta \tilde{s} = y. \quad (2.5)$$

Ou de forma equivalente:

$$\min_{\tilde{x}} \|\Psi \tilde{x}\|_0, \text{ sujeito a } \Phi \tilde{x} = y. \quad (2.6)$$

Idealmente precisar-se-ia resolver o problema de minimização da norma l_0 para acharmos a solução mais esparsa. Podemos imaginar que o vetor a ser minimizado pode ter componentes em N direções, mas queremos achar a representação que tenha menos componentes, dentro de uma condição específica, onde diversas combinações de componentes podem ser válidas.

Resolver um problema de minimização da norma l_0 é inviável do ponto de vista computacional mesmo para sinais com poucas amostras, por ser um problema combinatório de otimização [3].

Uma abordagem mais eficiente do ponto de vista computacional é a minimização da norma l_1 , que será abordada na próxima seção.

2.1 A Minimização da Norma l_1

O problema continua sendo o mesmo definido anteriormente para a norma l_0 , conforme as Equações (2.5) e (2.6), porém explorando a minimização da norma l_1 ,

podemos tratá-lo computacionalmente através de rotinas de otimização convexa, viabilizando a solução.

A Figura 2.3a ilustra o problema da minimização da norma l_1 .

O plano indicado na Figura 2.3a representa a equação linear que restringe a solução. A solução mais esparsa está nos vetores da base, e a norma l_1 leva à solução \tilde{s} , que é exatamente a solução mais esparsa. Mais precisamente, a reconstrução de s (\tilde{s}) é um problema de minimização, que deve calcular o vetor mais esparsa, que resolva o problema:

$$\min_{\tilde{s}} \|\tilde{s}\|_1, \text{ sujeito a } \Theta\tilde{s} = y. \quad (2.7)$$

ou ainda:

$$\min_{\tilde{x}} \|\Psi\tilde{x}\|_1, \text{ sujeito a } \Phi\tilde{x} = y. \quad (2.8)$$

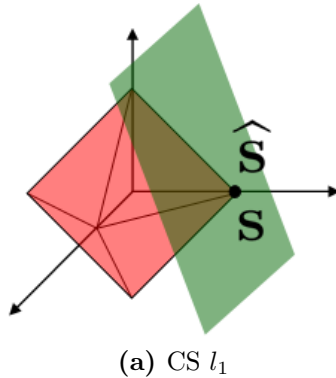


Figura 2.3: Minimização da norma l_1

Na prática utiliza-se uma tolerância para o algoritmo de minimização, indicando que a solução encontrada tem precisão satisfatória.

Há uma probabilidade muito próxima de 100% de conseguir reconstrução perfeita se observarmos $M \gtrsim cK \log N$, onde c é uma constante pequena [5], M o número de amostras, K a esparsidade, conforme a equação (2.1) e N o número de componentes do sinal.

Também precisamos garantir que Φ tenha incoerência [6] com o sinal amostrado. Podemos invocar um paralelo com a dualidade tempo-frequência para clarificar o

conceito de incoerência. Um sinal que tenha concentração em um domínio, como impulsos, terá uma representação espalhada no outro domínio. A incoerência também pode ser explicada como a maior correlação entre quaisquer dois elementos de Φ e Ψ . Matematicamente, temos que a incoerência $\mu(\Phi, \Psi)$ entre duas bases ortonormais é expressa como:

$$\mu(\Phi, \Psi) = \sqrt{N} \cdot \max_{1 \leq i, j \leq N} |\langle \phi_i, \psi_j \rangle| \quad , \quad \|\phi_i\|_2 \quad \|\psi_j\|_2 = 1. \quad (2.9)$$

Outra questão a ser enfrentada é que os sinais naturais podem não ser esparsos, ou estarem corrompidos por ruído. Mesmo nessas condições pode-se reconstruir o sinal original, desde que a matriz de amostragem tenha a seguinte característica [8]: Para cada inteiro $S = 1, 2, \dots, N$ define-se a constante de isometria S-restrita δ_S de uma matriz Θ_Ω como o menor número tal que:

$$(1 - \delta_S) \|s\|_2^2 \leq \|\Theta_{\Omega T} s\|_2^2 \leq (1 + \delta_S) \|s\|_2^2 \quad (2.10)$$

para todos os vetores S-esparsos, onde $\Theta_{\Omega T}$ é um conjunto Ω de vetores da matriz de amostragem Θ . Ou seja, a energia do sinal restrito ao conjunto Ω é proporcional ao tamanho de Ω . Esta condição é definida como Propriedade da Isometria Restrita (*Restricted Isometry Property- RIP*) [7], e garante que podemos utilizar *CS* ainda de forma efetiva, mesmo para sinais que não sejam exatamente esparsos, ou que tenham sido contaminados por ruído.

Outros autores [5] descrevem esta propriedade como o Princípio Uniforme da Incerteza (*Uniform Uncertainty Principle - UUP*), já que este Princípio também garante que o sinal não estará concentrado no domínio esparsos e no domínio das medidas. Ou seja:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{m}{n} \cdot \|h\|_2^2 \leq \|\Phi h\|_2^2 \leq \frac{3}{2} \cdot \frac{m}{n} \cdot \|h\|_2^2. \quad (2.11)$$

Este princípio é chamado de princípio da incerteza porque a proporção da energia de

h que aparece nas medidas é grosseiramente a mesma que a taxa de subamostragem $\frac{m}{n}$, sendo m o número de amostras e n o número de componentes do sinal. Enquanto h está inteiramente concentrado em um pequeno conjunto, ele está mais ou menos igualmente espalhado no domínio das medidas.

A partir de todas estas condições e seguindo a teoria, pode-se realizar simulações de amostragens e reconstruções de sinais.

Realizou-se simulações de amostragem e reconstrução, a partir do código `Matlab` disponível em <http://arquivos.mpp.eng.br/CS.m>, onde repetimos por 100 vezes a minimização da norma l_1 , variando M , desde 1 até 100, utilizando o sinal s da Figura 2.1a. Neste exemplo Ψ é a transformada DCT, Φ é um conjunto de impulsos com localização temporal aleatória e a tolerância de erro `pdtol` da solução para a rotina `l1eq_pd` [9] do `l1-Magic` [9] fixa e igual a 10^{-3} . Como cossenos e impulsos são incoerentes, temos a relação entre Φ e Ψ que é necessária para o sucesso da abordagem. Para comprovar a incoerência, pode-se executar o cálculo da Equação (2.9), obtendo-se uma coerência de valor 1.4142 ($\sqrt{2}$), entre a base DCT e um vetor impulso. Como duas bases maximamente incoerentes tem coerência com valor 1 e uma base maximamente coerente tem valor de coerência 22.6274 ($\sqrt{512}$) para uma Ψ com dimensão 512 dimensões, pode-se afirmar que o impulso e a DCT são incoerentes, pois o valor calculado é muito próximo de 1. Podemos realizar a amostragem compressiva indiferentemente no tempo, utilizando Φ ou na frequência, utilizando $\Theta = \Phi\bar{\Psi}$.

O critério para decidir se a reconstrução é fiel ao sinal amostrado, foi a *Peak Signal-to-Noise Ratio (PSNR)*. Acima de 60 dB é considerada reconstrução fiel. Abaixo de 60 dB considera-se reconstrução aproximada.

Nas Figuras 2.4a, 2.4b, 2.4c e 2.4d ilustramos dois exemplos de reconstruções e os erros associados a elas. O sinal original é representado pelos círculos vermelhos. Os asteriscos azuis nos gráficos das soluções indicam o sinal reconstruído. Nos erros associados, quando o PSNR do sinal reconstruído é acima de 60 dB, a maior componente tem amplitude com ordem de grandeza de 10^{-3} , que não aparece no

gráfico em comparação ao erro associado a soluções aproximadas.

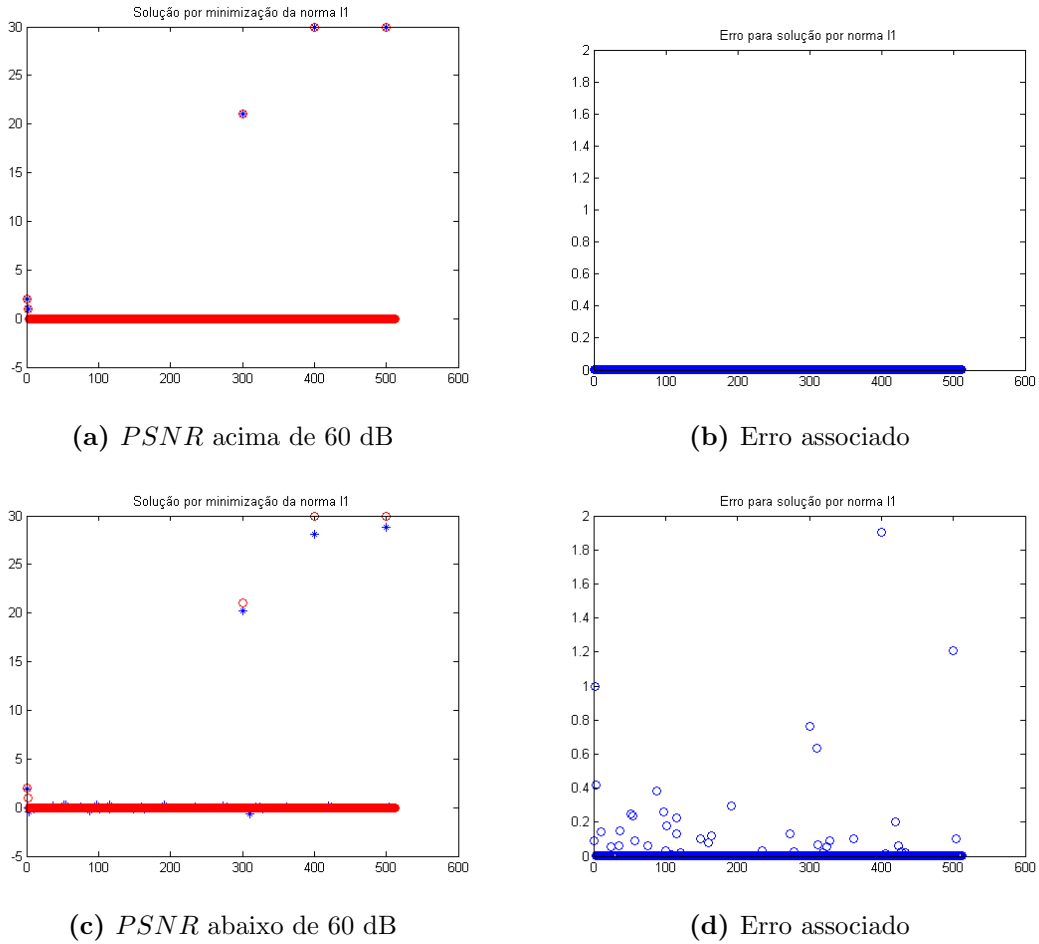
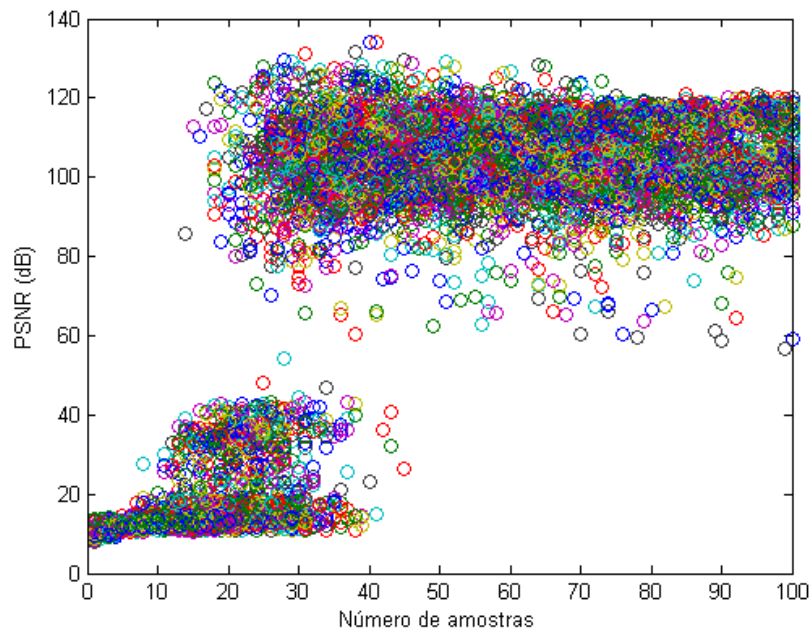
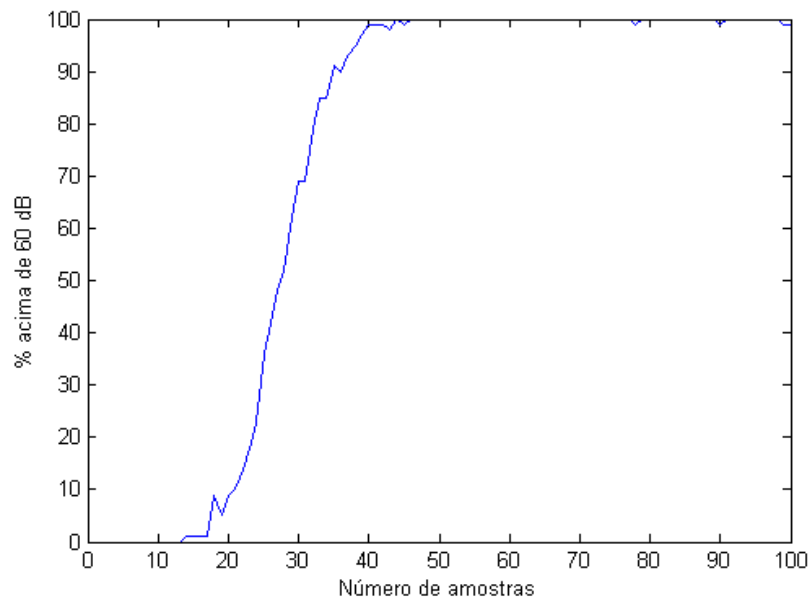


Figura 2.4: Soluções por minimização da norma l_1

A distribuição da $PSNR$ e o percentual de acertos em relação ao número de amostras apresentou-se como nas Figuras 2.5a e 2.5b. Conclui-se que com poucas amostras a probabilidade de reconstrução exata é muito baixa, mas mesmo nestas condições podemos obtê-la. Pelo critério de Nyquist para reconstruirmos perfeitamente o sinal original precisaríamos de uma frequência de amostragem que fosse o dobro da maior frequência do sinal. Neste exemplo precisaríamos de 500 amostras. Com CS, quando chegamos na condição de $M \gtrsim cK \log N$, passamos a ter uma probabilidade muito grande de conseguirmos uma melhor reconstrução. Em nosso experimento tivemos sempre reconstrução fiel a partir de 45 amostras, conforme ilustra a Figura 2.5b. Percebe-se também que até 15 amostras a probabilidade de reconstrução fiel é zero ou muito próxima de zero. Nota-se na Figura 2.5a grandes quantidades de resultados obtidos próximos de 15 dB e 110 dB, demonstrando que



(a) Distribuição da PSNR



(b) Percentual de acertos

Figura 2.5: Simulação de minimização da norma l_1 para diversos valores de M

quando a minimização consegue achar uma solução acima de 60 dB ela tende a ser bastante precisa, e quando não se consegue uma solução acima de 60 dB ela tende a ser bastante imprecisa. Valores de $PSNR$ próximos de 60 dB, que geram dúvida na classificação entre solução exata ou inexata são bastante raros.

2.2 Matrizes de Amostragem

As matrizes de amostragem podem ser estatísticas ou determinísticas. As matrizes estatísticas tem coeficientes aleatórios. Com isso garantem algum nível de incoerência com qualquer sinal amostrado. Porém não garantem incoerência máxima.

Uma classe destas matrizes aleatórias são compostas pelas funções *Noiselets*[10]. Faremos extenso uso de Noiselets representando as matrizes de amostragem estatísticas.

As Noiselets derivam das funções de Walsh e tem definição matemática dada por:

$$\begin{aligned}g_1(x) &= \chi_{[0,1)}(x) \\g_{2n}(x) &= (1 - i)g_n(2x) + (1 + i)g_n(2 - 2x) \\g_{2n+1}(x) &= (1 + i)g_n(2x) + (1 - i)g_n(2 - 2x)\end{aligned}\tag{2.12}$$

Sendo $\chi_{[0,1)}(x)$ a função característica.

Por outro lado, as matrizes de amostragem podem ser determinísticas. As matrizes de amostragem determinísticas podem ser bases derivadas de transformadas conhecidas como a DCT e a DWT. Pensando nas bases como vetores no espaço, podemos realizar rotações desses vetores para garantir a máxima incoerência entre a matriz de amostragem e as bases do domínio onde o sinal é representado de forma esparsa.

Geometricamente podemos exemplificar conforme as Figuras 2.6a, e 2.6b (extraídas de [11]) para bases que sejam, respectivamente, maximamente incoerentes e maximamente coerentes.

Para bases maximamente incoerentes temos:

$$\psi_1 = (1, 0, 0), \psi_2 = (0, 1, 0), \psi_3 = (0, 0, 1), \phi = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$|\psi_1, \phi| = |\psi_2, \phi| = |\psi_3, \phi| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

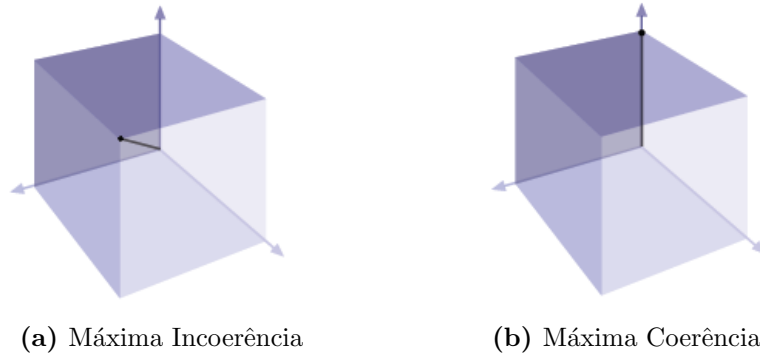


Figura 2.6: Coerência entre bases

$$\Rightarrow \mu = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = 1$$

Para bases maximamente coerentes temos:

$$\psi_1 = (1, 0, 0), \psi_2 = (0, 1, 0), \psi_3 = (0, 0, 1), \phi = (1, 0, 0)$$

$$|\psi_1, \phi| = 1, |\psi_2, \phi| = |\psi_3, \phi| = 0$$

$$\Rightarrow \mu = 1 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{N}$$

$\mu(\Phi, \Psi)$ mede o ângulo entre ϕ_i e ψ_j e varia entre 1 (caso maximamente incoerente) e \sqrt{N} (caso maximamente coerente). Ou seja:

$$1 \leq \mu(\Phi, \Psi) \leq \sqrt{N} \tag{2.13}$$

2.3 Aplicação em Imagens

Tendo-se definido toda a teoria de CS anteriormente para uma dimensão, podemos extrapolar o conceito para imagens, que são sinais em duas dimensões espaciais. Para a aplicação de transformadas em imagens, pode-se realizar a transformação separadamente nas colunas e nas linhas da imagem. Para se chegar a uma transformação S , a partir de uma imagem X , aplicamos a transformada Ψ , nas colunas, transpomos a matriz resultante e aplicamos a transformação mais uma vez. Ou mais

precisamente:

$$S = \Psi[\tilde{\Psi}X]^T. \quad (2.14)$$

Para adequar o caso bidimensional à teoria anterior, que é aplicada em apenas uma dimensão, simplesmente aplicamos as transformações como no caso bidimensional, porém desempilhamos as linhas da imagem, gerando uma representação vetorial em uma dimensão e realizando a minimização da norma l_1 no vetor resultante. Sempre que for necessário realizar uma transformação, seja ela direta ou inversa, ela se dará conforme a Equação (2.14).

Então, sendo X uma imagem com dimensões $m \times n$, com $N = m * n$ pixels, Φ uma matriz de amostragem e Ψ uma transformação, com inversa $\bar{\Psi}$, que leva x , a representação vetorial com esparsidade K de X , em um domínio esparso, definimos de forma análoga ao anteriormente colocado:

$$x \in \mathbb{R}^N ; y \in \mathbb{R}^M$$

$$\Psi \in \mathbb{R}^{N \times N} ; \Phi, \Theta \in \mathbb{R}^{M \times N}$$

$$K \ll M \ll N$$

$$s := \Psi x; \Theta := \Phi \bar{\Psi}. \quad (2.15)$$

$$y := \Phi x = \Phi \bar{\Psi} s = \Theta s. \quad (2.16)$$

A reconstrução da representação vetorial da imagem (\tilde{x}) é um problema de minimização, que deve calcular o vetor mais esparso, que resolva o problema:

$$\min_{\tilde{x}} \|\Psi \tilde{x}\|_1, \text{ sujeito a } \Phi \tilde{x} = y. \quad (2.17)$$

Portanto do ponto de vista de CS nada muda, visto que a imagem é representada vetorialmente. Porém a transformada que leva a um domínio esparso deve aproveitar as duas dimensões da imagem para levá-la a um domínio mais esparso.

Quanto maior a esparsidade do sinal no domínio onde se realiza a minimização, menor a distorção na imagem reconstruída. Caso o sinal seja pouco esparso, teremos

uma aproximação tão boa quanto a do vetor mais esparsa que possa ser achado para aquele número de amostras e para as condições (número máximo de iterações, margem de erro, precisão numérica, incoerência de Φ com x , etc...) de minimização impostas.

2.4 *Total Variation*

Além da minimização da norma l_1 , outro método de reconstrução que tem chamado a atenção é a minimização da *Total Variation* (TV) [3].

A definição matemática da TV [3] é:

$$\|g\|_{TV} = \sum_{t_1, t_2} \sqrt{|D_1 g(t_1, t_2)|^2 + |D_2 g(t_1, t_2)|^2}, \quad (2.18)$$

onde:

$$D_1 g(t_1, t_2) = g(t_1, t_2) - g(t_1 - 1, t_2) \quad \text{e} \quad D_2 g(t_1, t_2) = g(t_1, t_2) - g(t_1, t_2 - 1). \quad (2.19)$$

Em nosso caso, o problema de minimização da TV é expresso matematicamente como:

$$\min_{\tilde{x}} \|\Psi \tilde{x}\|_{TV}, \text{ sujeito a } \Phi \tilde{x} = y. \quad (2.20)$$

A minimização da TV pode ser interpretada como a minimização da norma l_1 do gradiente do sinal [5]. Este método tem mostrado bom desempenho na reconstrução de imagens [5] e constará em nossas avaliações como base comparativa para os resultados dos métodos que são propostos.

2.5 *Quantização*

No intuito de observar o comportamento das abordagens em imagens quantizadas, foram realizadas minimizações para diversos passos de quantização. Estudar o efeito da quantização é importante porque pode-se obter-se compressão de dados ao se

representar um conjunto de dados com grande faixa de valores em uma quantidade pequena de símbolos. Os efeitos da quantização são vistos na menor quantidade de dados necessários para representar o sinal, o que torna mais eficiente a transmissão digital deste sinal, mas também acarreta em perda de informação do sinal. Esta perda de informação torna o sinal quantizado diferente do sinal original. A diferença entre o sinal quantizado e o sinal original é uma distorção provocada pela quantização e pode ser considerada como uma forma de ruído. Esta distorção pode ser medida para servir de critério de comparação entre diferentes quantizações. Nesta tese foi utilizada quantização linear, que consiste em dividir a faixa de valores possíveis da entrada em intervalos iguais. Qualquer valor da entrada que esteja localizado dentro de uma faixa de quantização, terá o mesmo valor após a quantização. Durante o processo de quantização perde-se informação, e é necessário entender como esta perda de informação pode afetar os processos seguintes, como a reconstrução de uma imagem a partir da minimização da norma l_1 . Nesta tese, as amostras foram quantizadas linearmente, com passos de quantização variando de 2^0 a 2^7 .

2.6 Comparação Entre Resultados

Para a comparação entre os resultados, foi calculada a distorção da imagem reconstruída em relação à imagem original através da *Peak Signal-to-Noise Ratio (PSNR)* de imagens codificadas com faixa dinâmica de 256 níveis (8 bits por pixel - bpp), expressa em dB e calculada a partir da seguinte expressão:

$$PSNR := 10 \log_{10} \left(\frac{255^2}{MSE} \right) \quad (2.21)$$

$$MSE := \frac{\sum_{C,L} [X(C, L) - \tilde{X}(C, L)]^2}{C * L} \quad (2.22)$$

C = Altura da imagem ; L = largura da imagem

X = imagem original ; \tilde{X} = imagem reconstruída

Para estimar a taxa de bits (BR), expressa em bits por pixel (bpp) necessária para codificar as imagens, fizemos uso da entropia (E) [12], resumida na seguinte expressão:

$$BR := \frac{M}{N} \cdot E. \quad (2.23)$$

$$E := - \sum_{i=1}^q p_i \log_2 p_i \quad (2.24)$$

onde p_i é a probabilidade de codificação de cada passo de quantização i , estimada a partir do histograma das amostras quantizadas, M o número de amostras e N o número de componentes do sinal, ou o número de pixels da imagem. O problema de elementos que nunca acontecem é contornado somando-se 1 aos elementos do histograma utilizado para estimar p_i . Desta forma, qualquer elemento ocorre pelo menos uma vez. Esta abordagem é realizada para se evitar o problema da frequência zero [12].

3

Matrizes Determinísticas Maximamente Incoerentes com Transformadas Ortogonais

Ao analisar a teoria de *CS*, verifica-se que a incoerência entre a matriz de amostragem e a base de transformação que leva ao domínio esparso, desempenha um papel importante no desempenho do método. Matrizes de amostragem como *Noiselets* são incoerentes apenas do ponto de vista estatístico. Nosso objetivo é propor matrizes de amostragem que sejam maximamente incoerentes com a base da transformada do ponto de vista determinístico.

3.1 Implementação

A partir de matrizes de medida determinísticas calculadas com transformadas conhecidas como a DCT e a DWT, buscou-se melhorar o desempenho da minimização da norma l_1 . Imagens são esparsas quando representadas nas bases DCT e DWT, e tais transformadas são largamente utilizadas para compressão de imagens como nas compressões JPEG e JPEG2000.

Foi utilizado o pacote *l_1 -Magic* [9] para realizar as minimizações. Para o estudo da minimização da norma l_1 foi utilizada a rotina `l1_eq` [9] e para a minimização da

TV , foi utilizada a rotina `tv_eq` [9]. Na implementação no l_1 -`Magic`, a imagem X é representada por um vetor e levada por uma transformação Ψ para um domínio esparso. Um vetor é maximamente incoerente em relação a uma base, quando este vetor está o mais afastado possível de todos os vetores que compõe a base. Tal vetor é obtido fazendo uma combinação linear de todos os vetores da base e obrigando o vetor a estar o mais afastado possível de todos eles. Tal tarefa é realizada fazendo com que os produtos internos entre o vetor que se quer obter e os vetores da base sejam iguais. Para termos um vetor que seja maximamente incoerente com a base canônica, basta por exemplo, escolhermos um vetor que esteja nos vértices do cubo formado pelas coordenadas que são combinações de ± 1 , conforme a Figura 2.6b. Tais vetores estão maximamente afastados da base canônica. Como toda transformada ortogonal é uma rotação da base canônica, basta realizar a rotação dos vetores maximamente incoerentes utilizando a mesma transformação que transforma a base canônica na base ortogonal em que se esteja interessado.

A escolha dos vetores pode ser feita escolhendo-se vetores de uma base que seja formada por vetores com componentes ± 1 . Utilizamos as bases de Hadamard para nossos estudos pois os vetores que compõe a base de Hadamard são ortogonais, porém qualquer base que obedeça à condição acima pode ser utilizada.

Realizamos uma abordagem onde Φ é definida da seguinte forma:

$$\Phi = \bar{\Psi}H \tag{3.1}$$

$$H_{p,q} := \pm 1 \quad , \quad \forall \quad p, q \tag{3.2}$$

com o objetivo de aumentar a incoerência entre Φ e Ψ .

Conforme representado na Figura 2.2a apenas alguns vetores da base de Hadamard são aleatoriamente escolhidas para representar Φ . Note que a equação (3.1) corresponde à transformada inversa dos vetores da base de Hadamard, ou seja, ela gera as diagonais do hipercubo rodadas pela transformada inversa. Como a transformada inversa roda os vetores da base canônica para onde estão os vetores das

funções base da transformada, então as diagonais do hipercubo rodadas vão estar maximamente afastadas das funções base da transformada, pois são maximamente afastadas da base canônica.

3.2 O Conjunto Experimental

A verificação experimental foi realizada com o conjunto selecionado a seguir.

3.2.1 Parâmetros de Otimização do l_1 -Magic

A rotina de minimização da norma l_1 utilizada foi a `l1eq_pd` do pacote `l1-Magic`, com os seguintes parâmetros:

1. `pdtol` = 2000 (tolerância para finalização da minimização. O algoritmo (*Primal-Dual*) termina ao atingir valor menor que este)
2. `pdmxiter` = 3000 (número máximo de iterações para o algoritmo *Primal-Dual*).
3. `cgtol` = $1e-8$ (tolerância para o algoritmo *Conjugated Gradient*)
4. `cgmxiter` = 10000 (número máximo de iterações para o algoritmo *Conjugated Gradient*)

Nesta rotina devemos passar além dos parâmetros acima, o valor das amostras (y), indicado na rotina como a variável b , e Θ indicada como uma função, devendo ser indicada a função direta e inversa. Esta rotina busca o resultado mais esparsa até que a tolerância `pdtol` seja atingida, mesmo que `cgmxiter` tenha sido atingido. Na execução da rotina o número máximo de iterações `pdmxiter` nunca foi atingido.

3.2.2 Imagens

Foram utilizadas as imagens *Lena*, *CameraMan* e *Phantom* e *IWHF* na resolução de 256 pixels \times 256 pixels. Elas são apresentadas na Figura 3.1.



Figura 3.1: Imagens de Teste

As imagens estão codificadas em 8 bits, com 256 níveis de cinza. A imagem *IWHF* é gerada a partir da transformada wavelet inversa de um espectro de 3 componentes de alta frequência. O objetivo é a verificação do comportamento dos métodos abordados com um sinal que tenha uma esparsidade muito alta.

3.2.3 Transformadas

As transformadas Wavelet (DWT) foram calculadas a partir do pacote `WaveLab` [13], sendo escolhido para estudo o tipo `Coiflet` com 3 níveis.

3.2.4 Métodos de Minimização

Foram estudadas diversas abordagens, com combinações de Φ , Ψ e método de minimização:

Tabela 3.1: Abordagens de amostragem e reconstrução - ortogonais

Abordagem	Método de minimização	Matriz de amostragem
1	Total Variation	Noiselets
2	Norma l_1	Noiselets e DCT
3	Norma l_1	Noiselets e DWT (Coiflet)
4	Norma l_1	Hadamard e DCT
5	Norma l_1	Hadamard e DWT (Coiflet)

3.3 Resultados

Seguindo as definições das equações (2.23) e (2.21) para bitrate (BR) e Peak Signal-to-Noise Ratio ($PSNR$), foi traçada a curva $BR \times PSNR$, para cada abordagem, com diversos passos de quantização.

Os gráficos das Figuras 3.2, 3.3, 3.4 e 3.5 mostram, para cada imagem, os melhores resultados finais das abordagens, levando-se em conta o melhor resultado de qualquer passo de quantização para determinada imagem.

Do ponto de vista da classificação das imagens, as imagens *Lena* e *CameraMan* são imagens naturais, enquanto *Phantom* e *IWHF* são imagens não-naturais. Percebe-se que para as imagens naturais a abordagem por TV tem melhor desempenho para bitrates entre 1 e 5 bpp. Para *Phantom* e *IWHF*, imagens com espectro bem mais esparso, as abordagens por minimização da norma l_1 se tornam mais eficientes. Nestes casos, a abordagem por TV se mostrou com desempenho bem inferior, sendo a abordagem 5, com matrizes determinísticas formada por bases de Hadamard e DWT a que gerou melhores curvas de taxa de distorção.

Do ponto de vista das transformadas, a DWT gerou sempre melhores resultados que a DCT, independentemente do bitrate, do passo de quantização, ou do tipo de

imagem sendo estudada.

Todas as observações foram feitas com a amostragem quantizada. É importante lembrar que sem a quantização os resultados de matrizes de amostragem estatísticas como as *Noiselets* é tão bom quanto os resultados de matrizes de amostragem determinísticas maximamente incoerentes.

Lena é uma imagem natural, com espectro concentrado em baixas frequências, mas também com componentes espalhadas ao longo de todo o espectro. Pode-se perceber no gráfico da figura 3.2 o melhor desempenho da matriz de amostragem determinística maximamente incoerente relacionada à DWT. Mesmo a matriz determinística relacionada à DCT teve um desempenho superior às matrizes estatísticas, exceto para números de amostras próximos ao número de componentes, onde as abordagens por DWT conseguem maiores *PSNR*. Note que a abordagem por *Total Variation*, realizada com matrizes de amostragem estatísticas, tem melhor desempenho de reconstrução para os valores de *PSNR* normalmente utilizados, situados entre 30 e 35 dB.

Camera Man é, assim como Lena, uma imagem natural. A abordagem por *Total Variation*, realizada com matrizes de amostragem estatísticas, tem melhor desempenho de reconstrução durante quase toda a extensão da curva, exceto para número de amostras perto do número de componentes. Pode-se confirmar no gráfico da figura 3.3 o mesmo comportamento percebido em Lena, com o melhor desempenho da matriz de amostragem determinística maximamente incoerente relacionada à DWT. Aqui a matriz determinística relacionada à DCT e a matriz estatística com transformada DWT, revezaram-se como segundo melhor desempenho, sendo o melhor desempenho até por volta de 35 dB da matriz estatística com DWT, e em seguida, até aproximadamente 45 dB o melhor desempenho da matriz determinística com transformada DWT.

Phantom não é uma imagem natural. Seu espectro é bem mais esparsa em relação a imagens naturais, e por isso o desempenho da minimização da norma l_1 é melhor, levando a reconstruções naturalmente com melhor *PSNR*, como se vê no gráfico da

figura 3.4. Para este tipo imagem as abordagens com DWT, tanto determinística, quanto estatística tiveram desempenho de reconstrução muito melhor que qualquer outra abordagem, incluindo a *Total Variation*. O desempenho inferior da *Total Variation* pode ser explicado pela característica da abordagem de tentar minimizar a norma l_1 do gradiente da imagem, o que tende a suavizar as transições entre níveis de cinza. Para imagens naturais esta abordagem tem excelente efeito, mas para imagens com transições mais definidas como Phantom, leva a um desempenho de reconstrução inferior.

IWHF é uma imagem gerada a partir de transformada DWT inversa de um espectro com apenas 3 frequências altas. O objetivo foi verificar como seria o desempenho dos métodos de reconstrução para uma imagem com representação tão esparsa. Obteve-se a confirmação do bom desempenho dos métodos com transformada DWT, sendo que para esta imagem o método determinístico com transformada DCT também apresentou bom desempenho, conforme mostra o gráfico da figura 3.5.

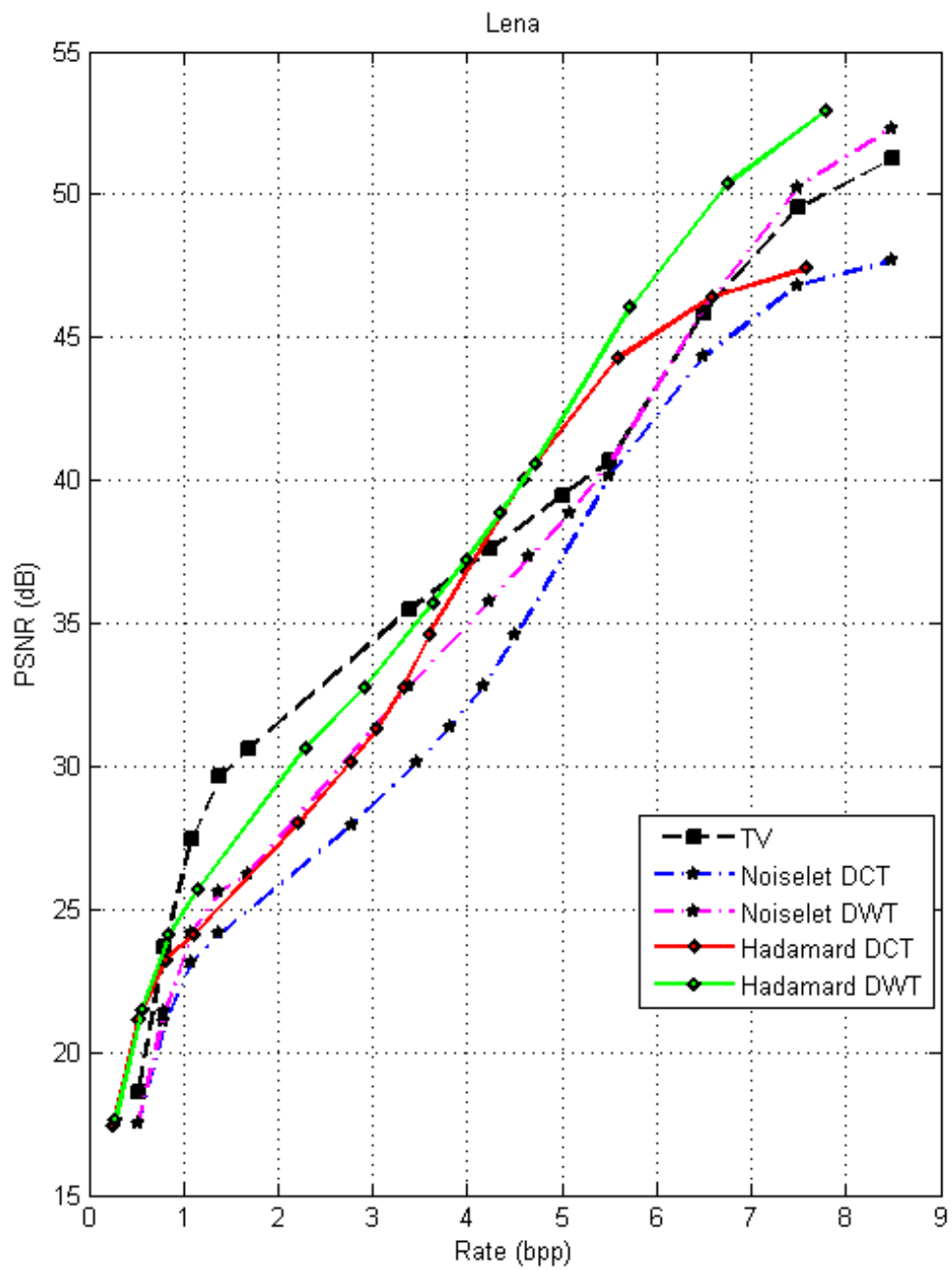


Figura 3.2

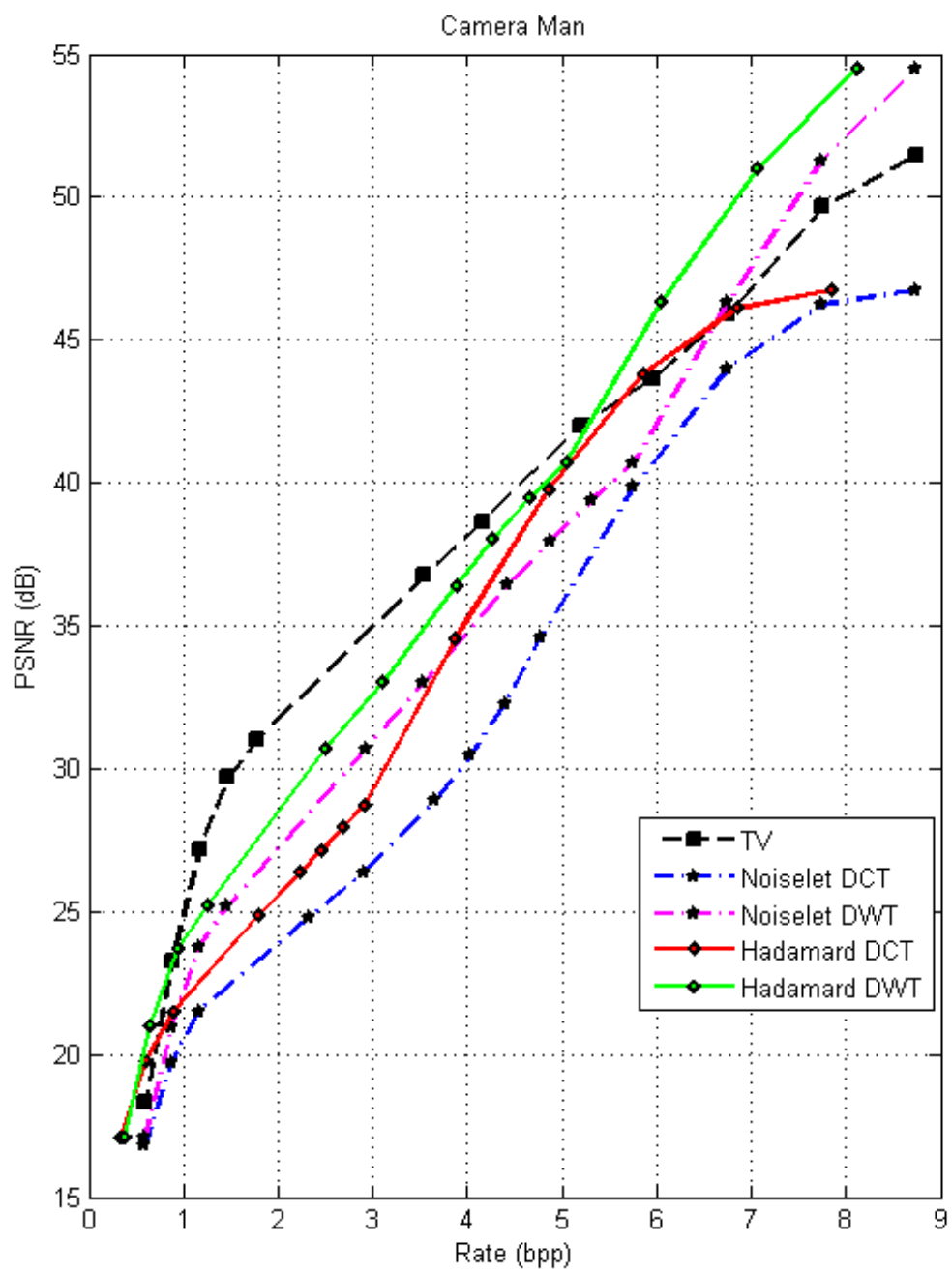


Figura 3.3

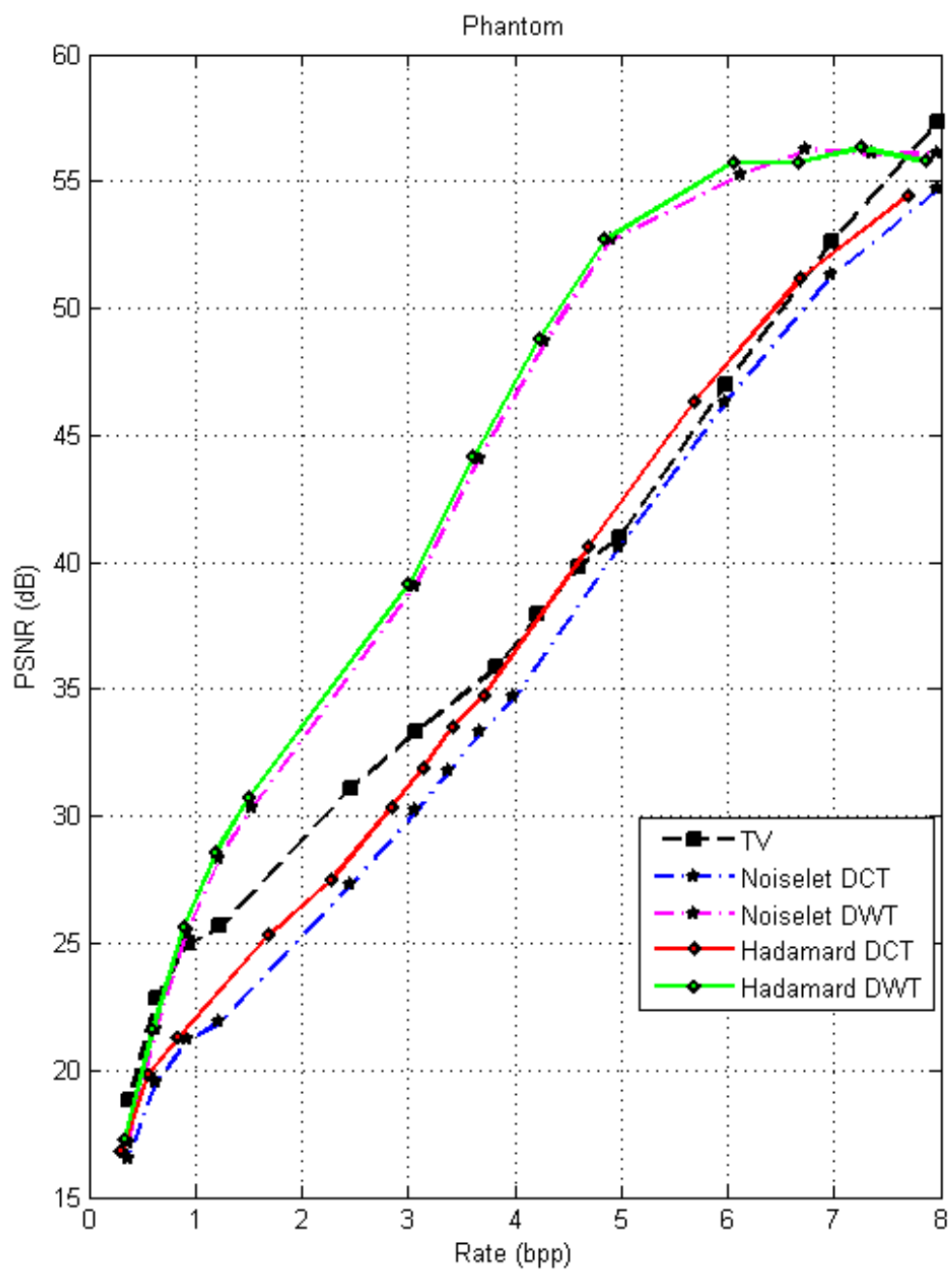


Figura 3.4

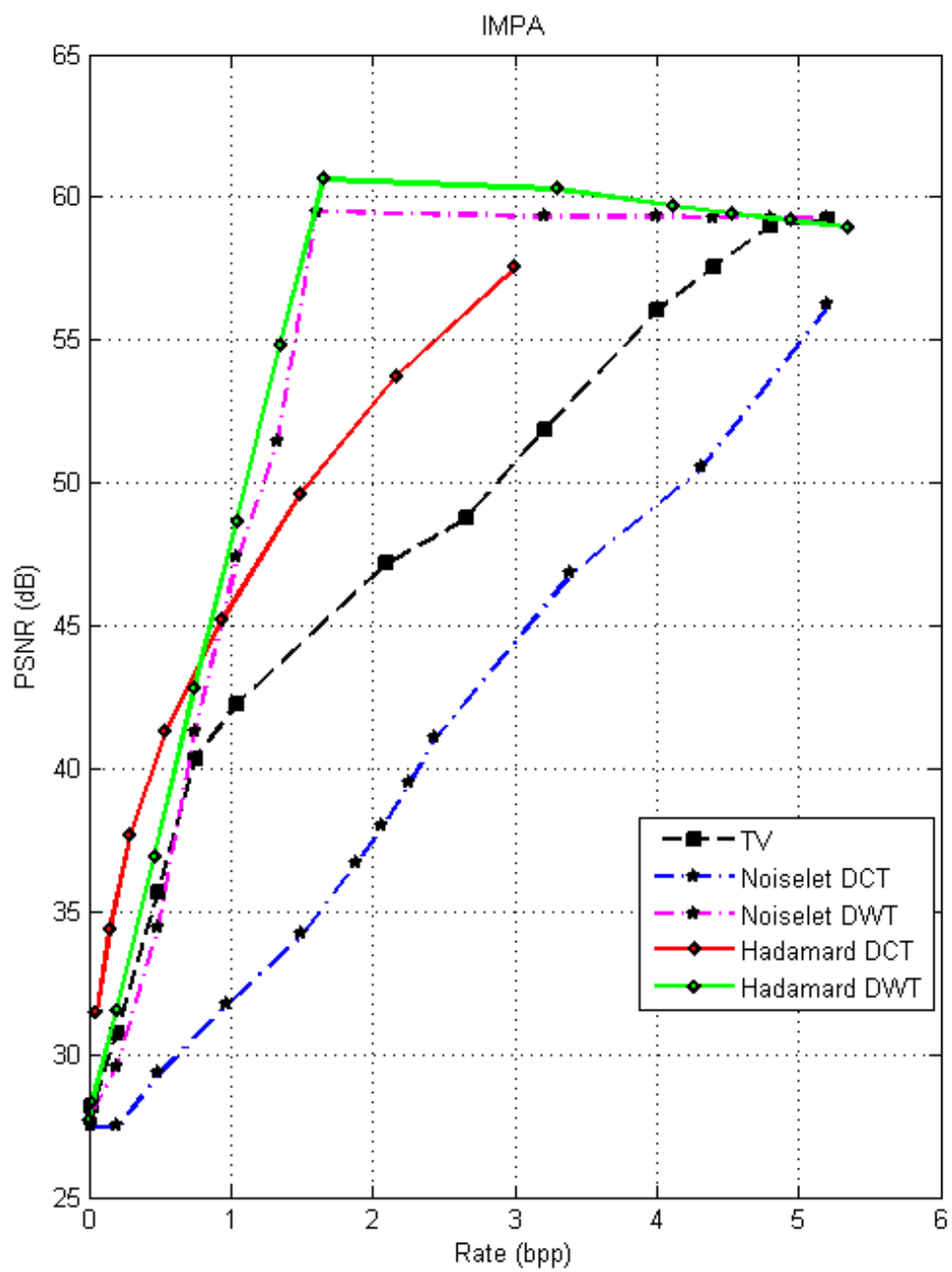


Figura 3.5

4

O Caso Biortogonal

No capítulo anterior obteve-se bons resultados utilizando-se matrizes determinísticas ortogonais. Aqui passamos a investigar como melhorar ainda mais os resultados. A partir dos melhores resultados associados às matrizes de amostragem relacionadas às transformadas wavelet ortogonais, estabelecemos a hipótese de uma natural melhoria de desempenho na reconstrução de imagens com a utilização de matrizes de amostragem relacionadas a transformadas wavelet biortogonais. Como tais transformadas permitem filtros de fase linear e de extensões simétricas do sinal, pode-se aumentar a esparsidade da imagem no domínio da transformada, já que não se incluirão falsas transições do sinal nas bordas. Uma das possibilidades para isso é a utilização da transformada biortogonal DWT-CDF97. Entretanto como adequar-se o caso ortogonal ao caso biortogonal ?

Para garantirmos a máxima incoerência entre a base de amostragem Φ e a transformação inversa, precisamos que o produto interno máximo entre as bases Φ e Ψ , seja o menor possível. Ou seja: $\max\langle\phi_i^T, \bar{\psi}_i\rangle$ deve ser mínimo.

Assim sendo:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_1^T \\ \phi_2^T \\ \vdots \\ \phi_P^T \end{bmatrix}; \bar{\Psi} = \begin{bmatrix} \bar{\psi}_1 & \bar{\psi}_2 & \dots & \bar{\psi}_N, \end{bmatrix}$$

$$\Theta = \begin{bmatrix} \phi_1^T \bar{\psi}_1 & \phi_1^T \bar{\psi}_2 & \dots & \phi_1^T \bar{\psi}_N \\ \phi_2^T \bar{\psi}_1 & \phi_2^T \bar{\psi}_2 & \dots & \phi_2^T \bar{\psi}_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_P^T \bar{\psi}_1 & \phi_P^T \bar{\psi}_2 & \dots & \phi_P^T \bar{\psi}_N \end{bmatrix}.$$

Pode-se definir k vetores V com l componentes através de:

$$V_{kl} = \sum_j h_{kj} \psi_{jl}, \quad h_{kj} = \pm 1 \quad \forall \quad kj,$$

e queremos:

$$V_k^T \bar{\psi}_i = \sum_j h_{kj} \psi_j^T \bar{\psi}_i = \sum_j h_{kj} \delta_{ij} = h_{ij},$$

$$|V^T \bar{\psi}_i| = 1.$$

A definição de ortogonalidade fornece:

$$\psi_i^T \bar{\psi}_j = \delta_{ij}$$

e

$$|\bar{\psi}_i| = 1 = |\psi_i|, \text{ pois } \psi_i^T \bar{\psi}_j = \delta_{ij}.$$

Para os ângulos entre os vetores $\bar{\psi}_i$ serem iguais:

$$|\bar{\psi}_i^T| |\psi_i| \cos \theta_{ii} = 1, e$$

$$\cos \theta_{ii} = \frac{1}{|\bar{\psi}_i^T| |\psi_i|},$$

então:

$$\bar{\psi}'_i = \frac{\bar{\psi}_i}{|\bar{\psi}_i|}, \text{ e } \psi'_i = \psi_i |\bar{\psi}_i|.$$

Se $|\bar{\psi}_i| = 1, \forall i$ então $\psi'_i = \psi_i$. Os ângulos com todos os vetores $\bar{\psi}_i$ são iguais, minimizando o produto interno entre V_k e $\bar{\psi}_i$. Com isso podemos construir a matriz de amostragem maximamente incoerente com a transformada inversa:

$$\Phi = V_{kl} = \sum_j h_{kj} \psi_{jl}. \quad (4.1)$$

Então:

$$\begin{aligned} V_{11} &= h_{11}\psi_{11} + h_{12}\psi_{21} + \dots + h_{1n}\psi_{n1}, \\ V_{12} &= h_{11}\psi_{12} + h_{12}\psi_{22} + \dots + h_{1n}\psi_{n2}, \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \vdots \\ V_{1n} &= h_{11}\psi_{1n} + h_{12}\psi_{2n} + \dots + h_{1n}\psi_{nn}, \\ V_{21} &= h_{21}\psi_{11} + h_{22}\psi_{21} + \dots + h_{2n}\psi_{n1}, \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \vdots \\ V_{nn} &= h_{n1}\psi_{1n} + h_{n2}\psi_{2n} + \dots + h_{nn}\psi_{nn}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Que é igual a $H\Psi$. Logo:

$$\Phi = H\Psi = \bar{\Psi}H. \quad (4.3)$$

Não devemos esquecer que H pode ser qualquer matriz que tenha vetores formados por componentes que sejam ± 1 .

4.1 Expansão para o Caso Biortogonal

Quando $|\bar{\psi}_i| \neq 1$ como em casos de transformada biortogonal, então a equação (4.3) se torna:

$$\bar{\psi}'_i = \frac{\bar{\psi}_i}{|\bar{\psi}_i|}, \quad (4.4)$$

$$\psi'_i = \psi_i |\bar{\psi}_i|. \quad (4.5)$$

Assim:

$$\Phi = V_{kl} = \sum_j h_{kj} \psi'_{jl} = \sum_j h_{kj} \psi_{jl} |\bar{\psi}_{jl}|. \quad (4.6)$$

E tem-se:

$$\Phi = H\Psi'. \quad (4.7)$$

No caso biortogonal deve-se normalizar os vetores que compõe a base Ψ , realizando-se o produto de cada vetor com o módulo do vetor correspondente da transformada inversa. Desta forma garantimos a máxima incoerência também para casos de transformação biortogonal.

4.2 Resultados para o Caso Biortogonal

De posse das técnicas necessárias para a verificação empírica da hipótese do melhor desempenho de reconstrução utilizando-se matrizes de amostragem maximamente incoerentes derivadas de transformadas biortogonais, traçou-se outras curvas $BR \times PSNR$ com as seguintes abordagens:

Tabela 4.1: Abordagens de amostragem e reconstrução - biortogonais

Abordagem	Método de minimização	Matriz de amostragem
6	Norma l_1	Noiselet e DWT (CDF97)
7	Norma l_1	Hadamard e DWT (CDF97)

Realizando as amostragens e reconstruções com a DWT-CDF97 [14], chegamos aos resultados mostrados nas Figuras 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.7, 4.8, 4.9, 4.10, 4.11 e 4.12.

Os resultados mostraram-se ainda melhores demonstrando que a utilização de transformadas biortogonais é uma evolução em relação às transformadas ortogonais.

Percebe-se que para as imagens naturais a abordagem por TV tem melhor desempenho em uma faixa reduzida, entre 1 e 3 bpp. Em qualquer outro caso a abordagem por minimização da norma l_1 mostrou-se superior.

No gráfico da figura 4.1 percebe-se a equivalência das wavelet Coiflet e CDF97,

quando utilizadas em associação com matrizes de amostragem estatísticas e imagens naturais como Lena.

No gráfico da figura 4.2 para Camera Man, uma imagem natural assim como Lena, a mesma equivalência entre as transformadas wavelet ortogonal e biortogonal, quando em associação com matrizes de amostragem estatísticas.

Já para Phantom, no caso de matrizes estatísticas, o desempenho de reconstrução é muito semelhante até uma PSNR de 40 dB. A partir de 40 dB, já na curva com o menor passo de quantização, houve um melhor desempenho da transformada DWT coiflet, conforme pode-se ver no gráfico da figura 4.3.

E para IWHF, o mesmo comportamento de Phantom, sendo os desempenhos muito próximos até 40 dB e a transformada DWT tendo um melhor desempenho de reconstrução para maiores *PSNR*, já trabalhando na curva com o menor passo de quantização. Este comportamento é observado no gráfico da figura 4.4.

Já para matrizes de amostragem determinísticas, a transformada biortogonal teve um melhor desempenho que a ortogonal para a imagem Lena. No gráfico da figura 4.5 pode-se observar essa característica.

O melhor desempenho de reconstrução da transformada biortogonal, quando utilizada em conjunto com matrizes de amostragem determinísticas é confirmado para a imagem Camera Man no gráfico da figura 4.6.

Para Phantom, uma imagem com espectro muito esparsa, os desempenhos das transformadas ortogonais e biortogonais em conjunto com matrizes determinísticas são muito parecidos, havendo leve vantagem para a transformada biortogonal. Este comportamento é observado no gráfico da figura 4.7.

O mesmo resultado obtido para Phantom é confirmado para IWHF no gráfico da figura 4.8. Um desempenho muito semelhante ao longo de toda a curva, exceto para maiores valores de *PSNR*, quando o passo de quantização é menor.

Na comparação entre todos os métodos, dentre as abordagens por minimização da norma l_1 , vemos no gráfico da figura 4.9 o melhor desempenho da matriz de amostragem determinística com transformada biortogonal CDF97 para a imagem

Lena. A abordagem por *Total Variation* tem melhor desempenho entre 25 e 35 dB de *PSNR*.

Para Camera Man, resultado semelhante ao de Lena, conforme observa-se no gráfico da figura 4.10. A abordagem por *Total Variation* tem melhor desempenho entre 25 e 35 dB. Dentre as abordagens por minimização da norma l_1 vemos a clara vantagem na utilização de matrizes maximamente incorerentes com transformadas wavelet biortogonais.

Para imagens com espectro esparso, como Phantom, a minimização da normal l_1 mostra vantagem em relação à *Total Variation*. Dentre as abordagens por minimização da norma l_1 , novamente a matriz de amostragem determinística com transformada wavelet biortogonal mostra desempenho superior às outras abordagens. A observação deste comportamento pode ser feita no gráfico da figura 4.11.

IWHF, outra imagem com espectro esparso também demonstra a vantagem dos métodos por minimização da norma l_1 em relação ao método por *Total Variation*. As matrizes de amostragem determinísticas relacionadas a wavelet tem melhor desempenho, sendo que para valores de *PSNR* acima de 57 dB, a transformada DWT demonstra melhor desempenho. Esta característica pode ser observada no gráfico da figura 4.12.

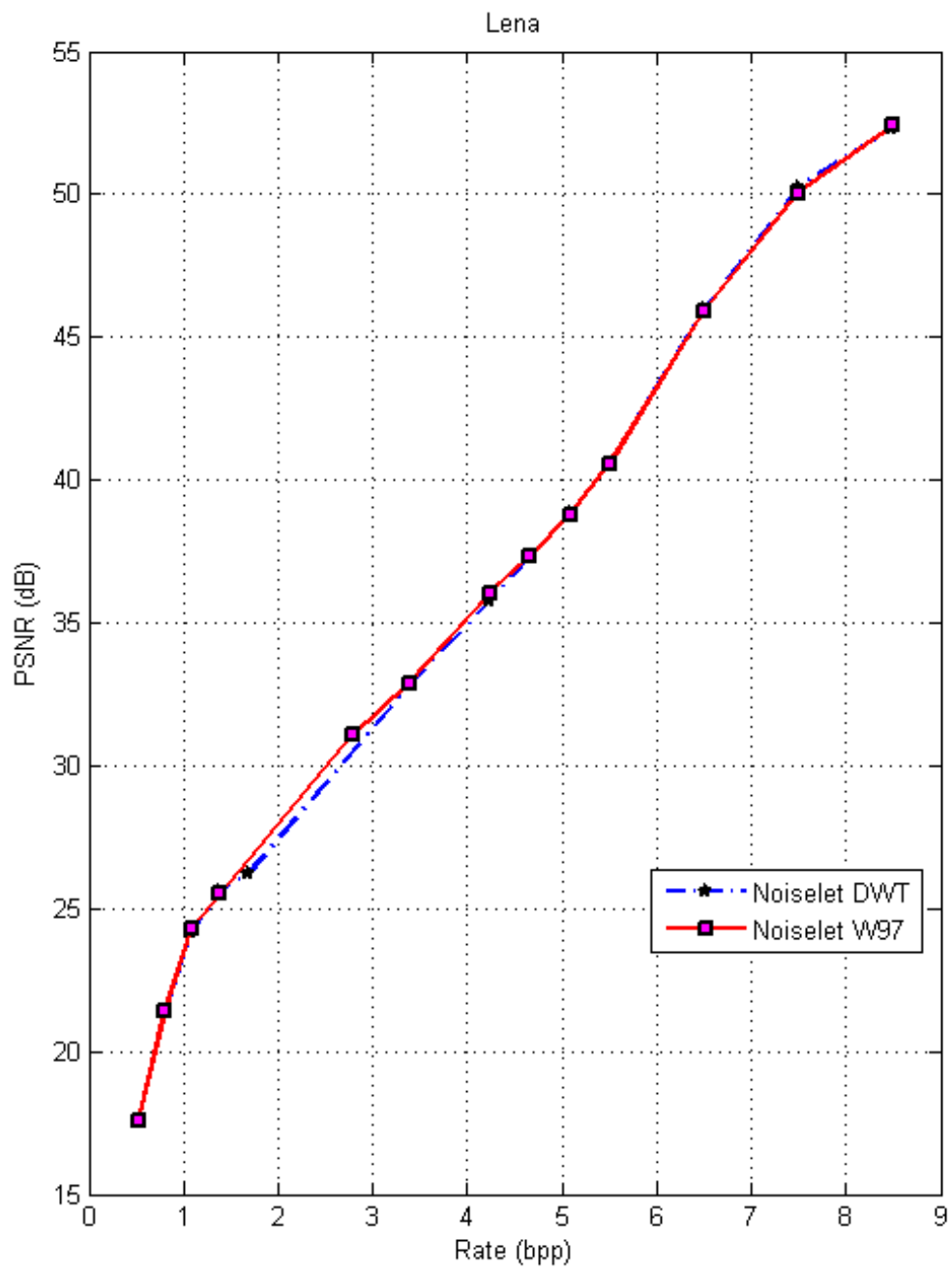


Figura 4.1

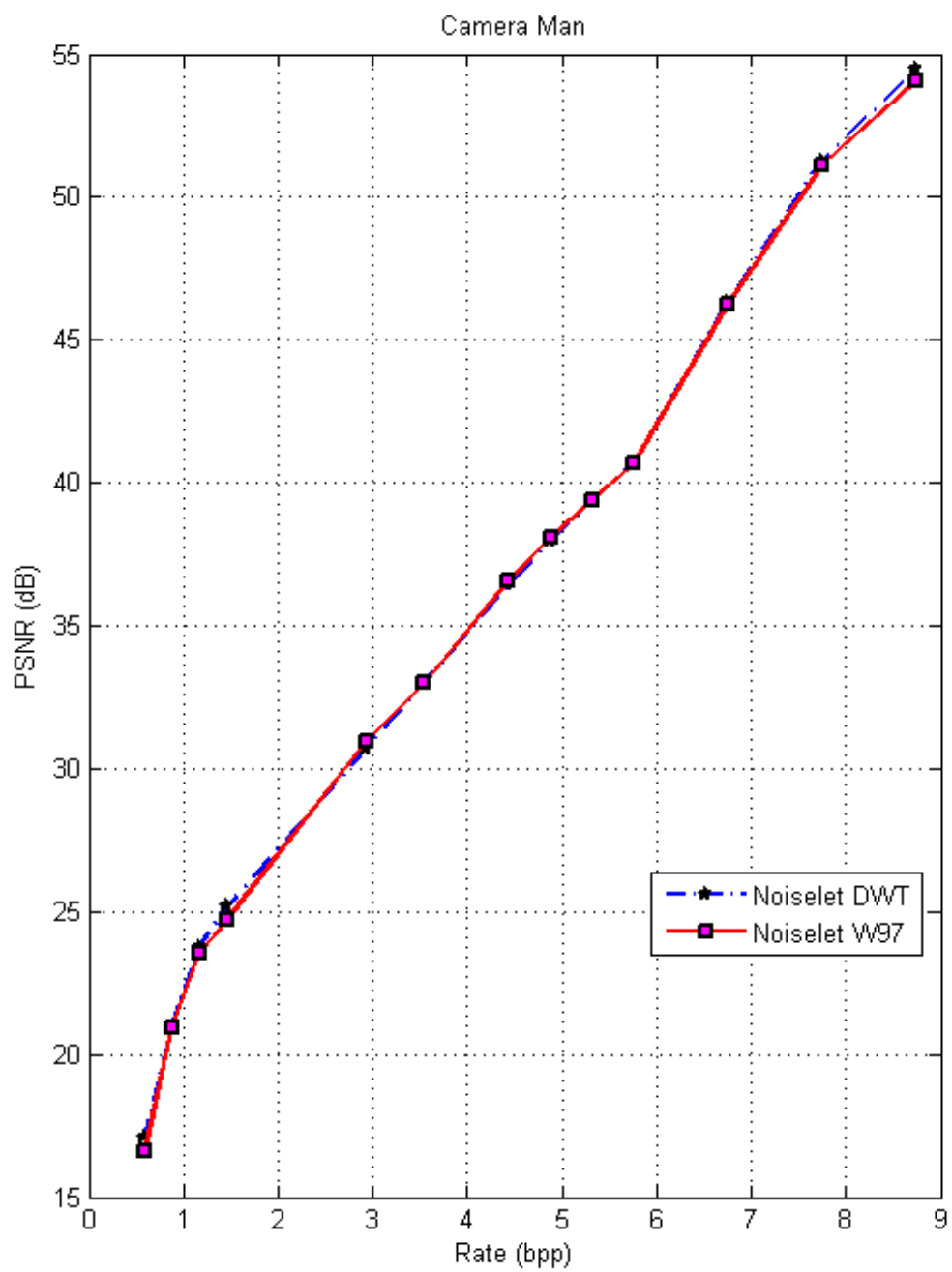


Figura 4.2

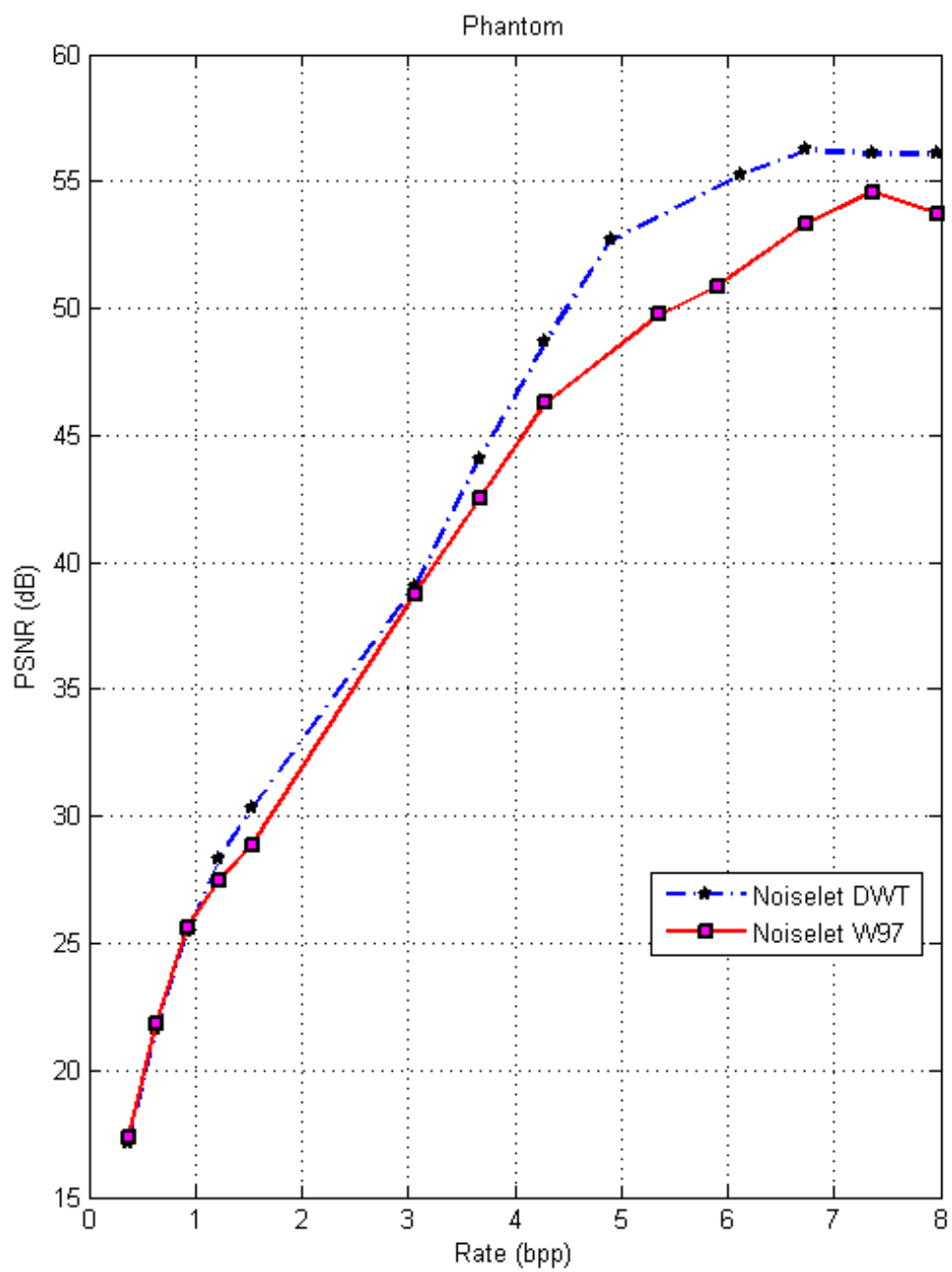


Figura 4.3

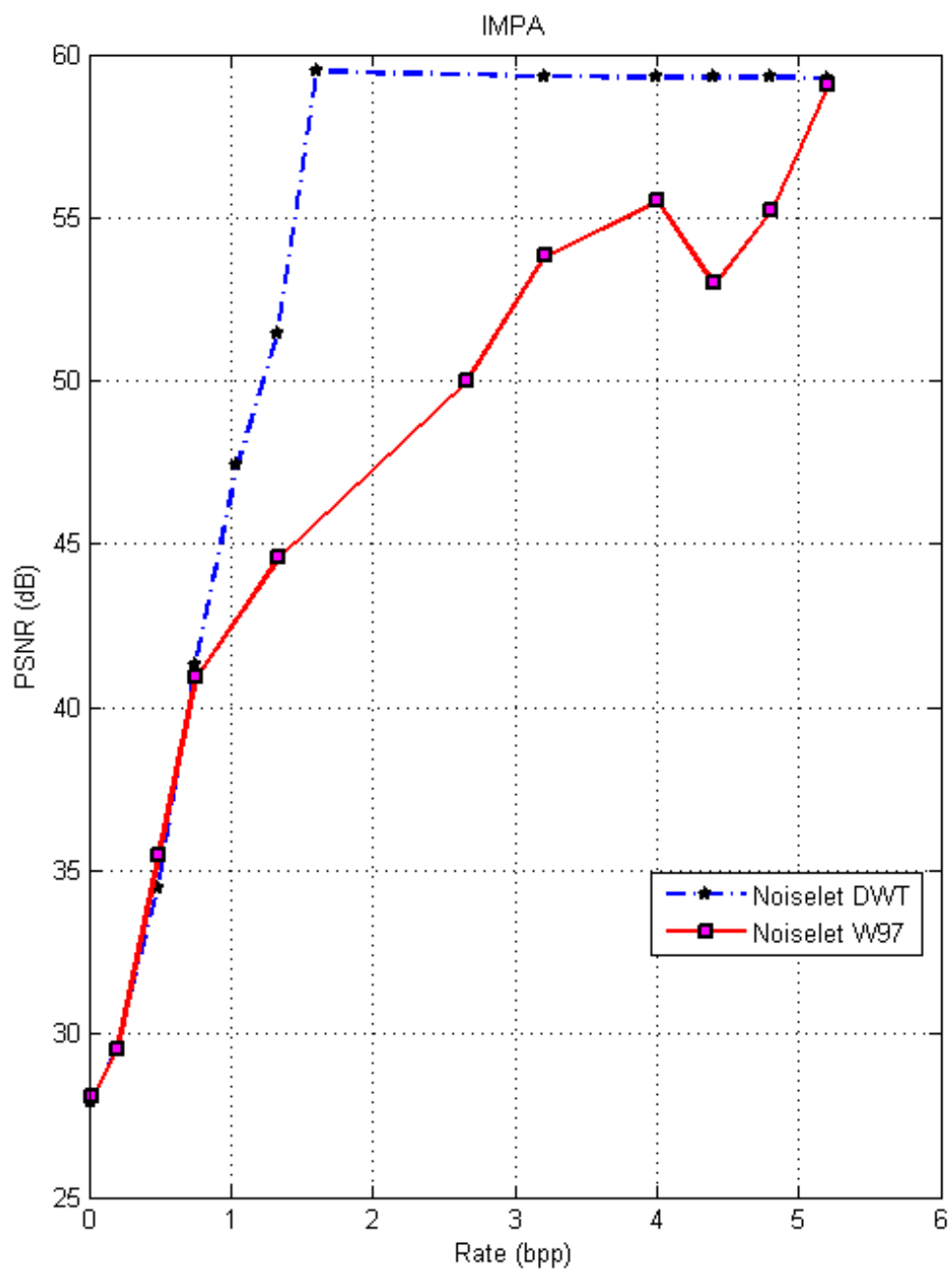


Figura 4.4

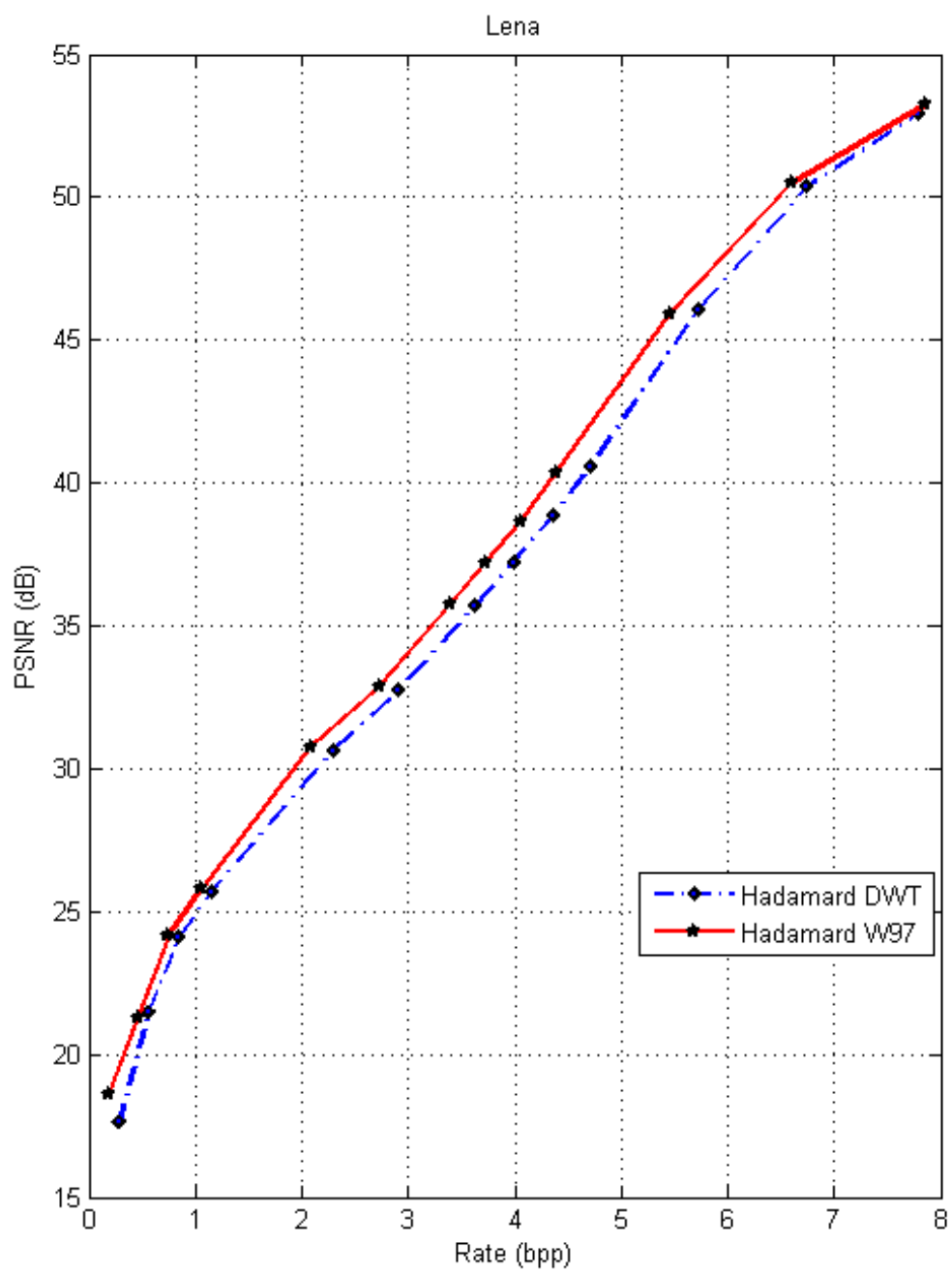


Figura 4.5

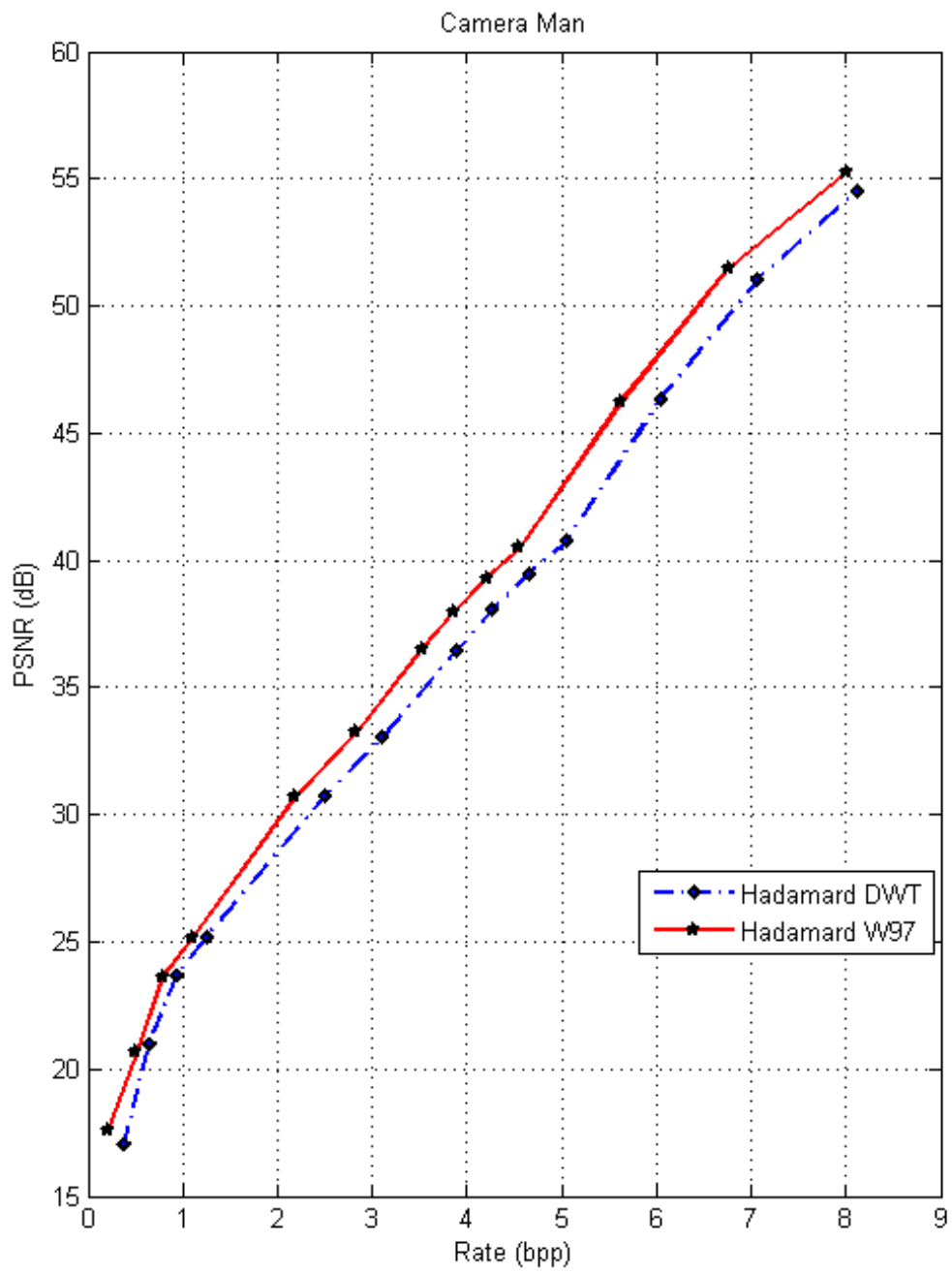


Figura 4.6

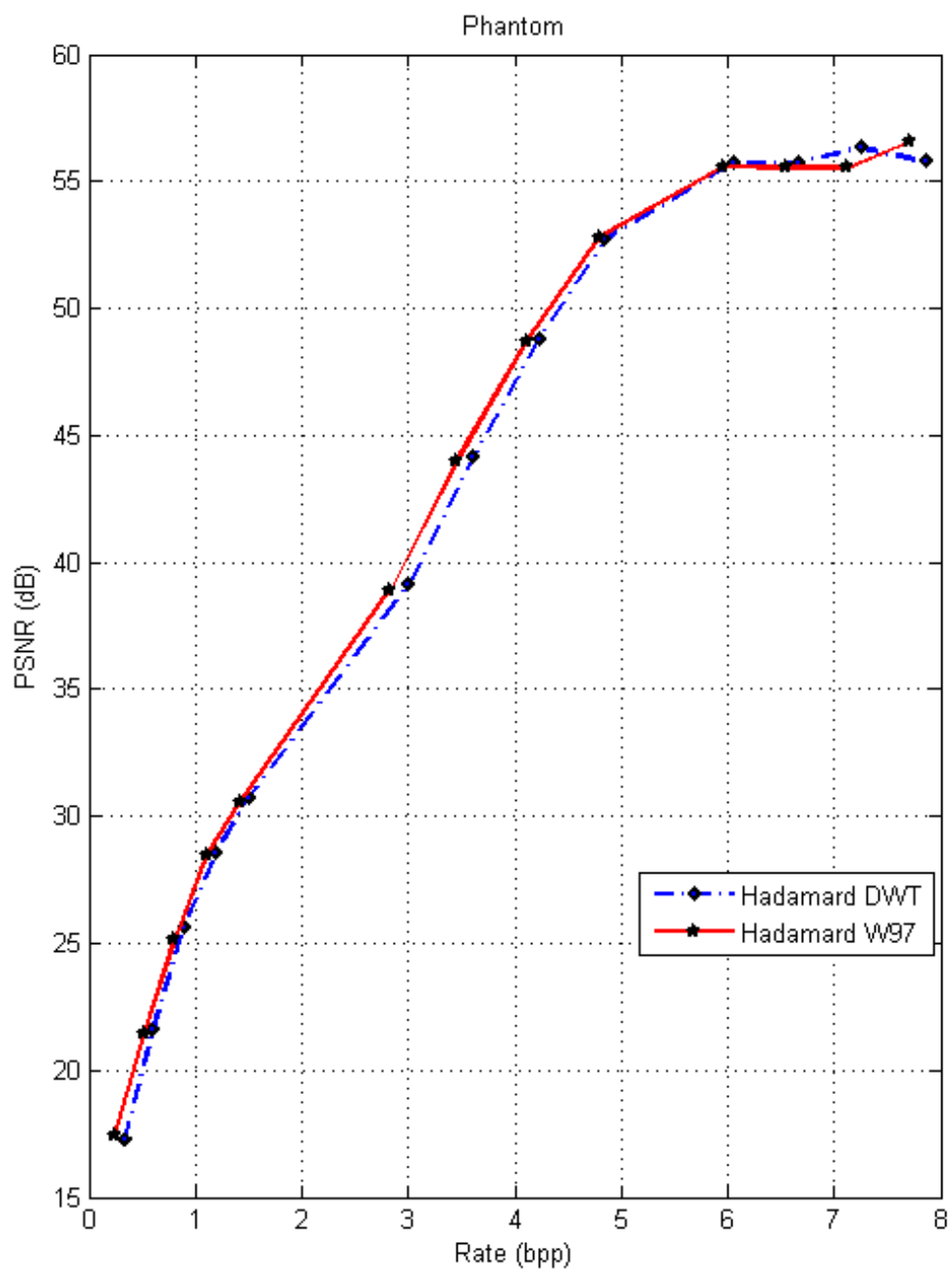


Figura 4.7

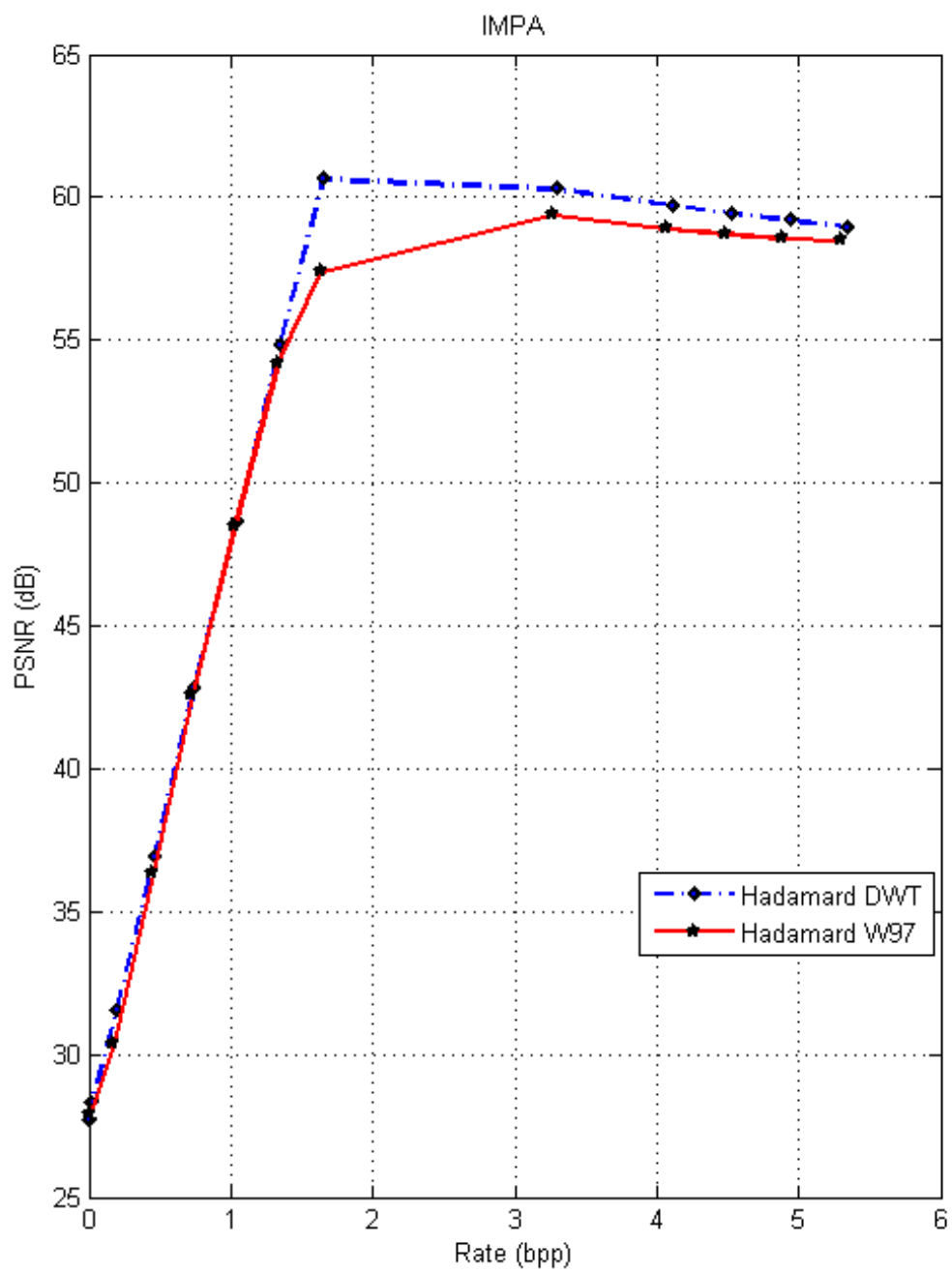


Figura 4.8

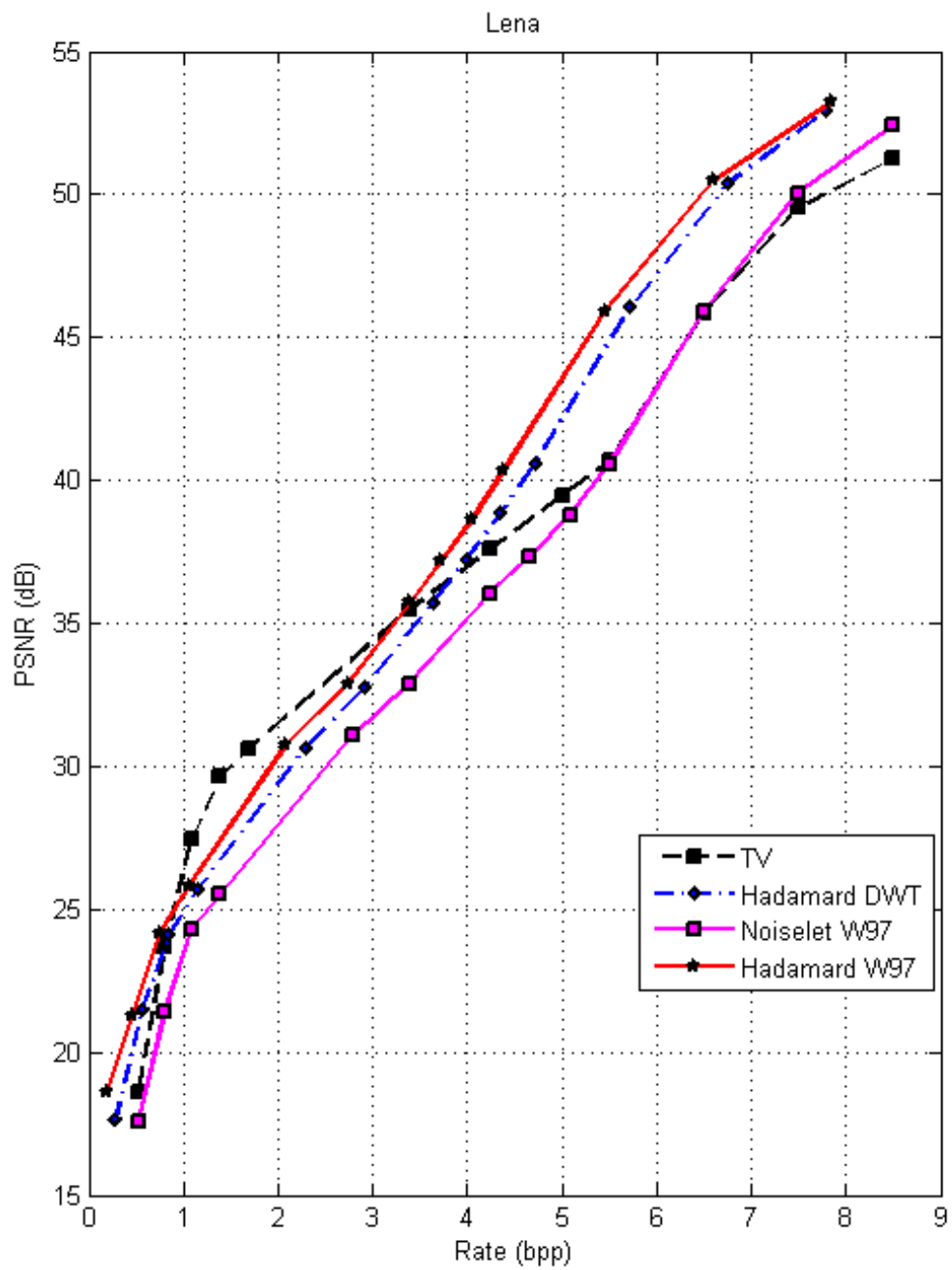


Figura 4.9

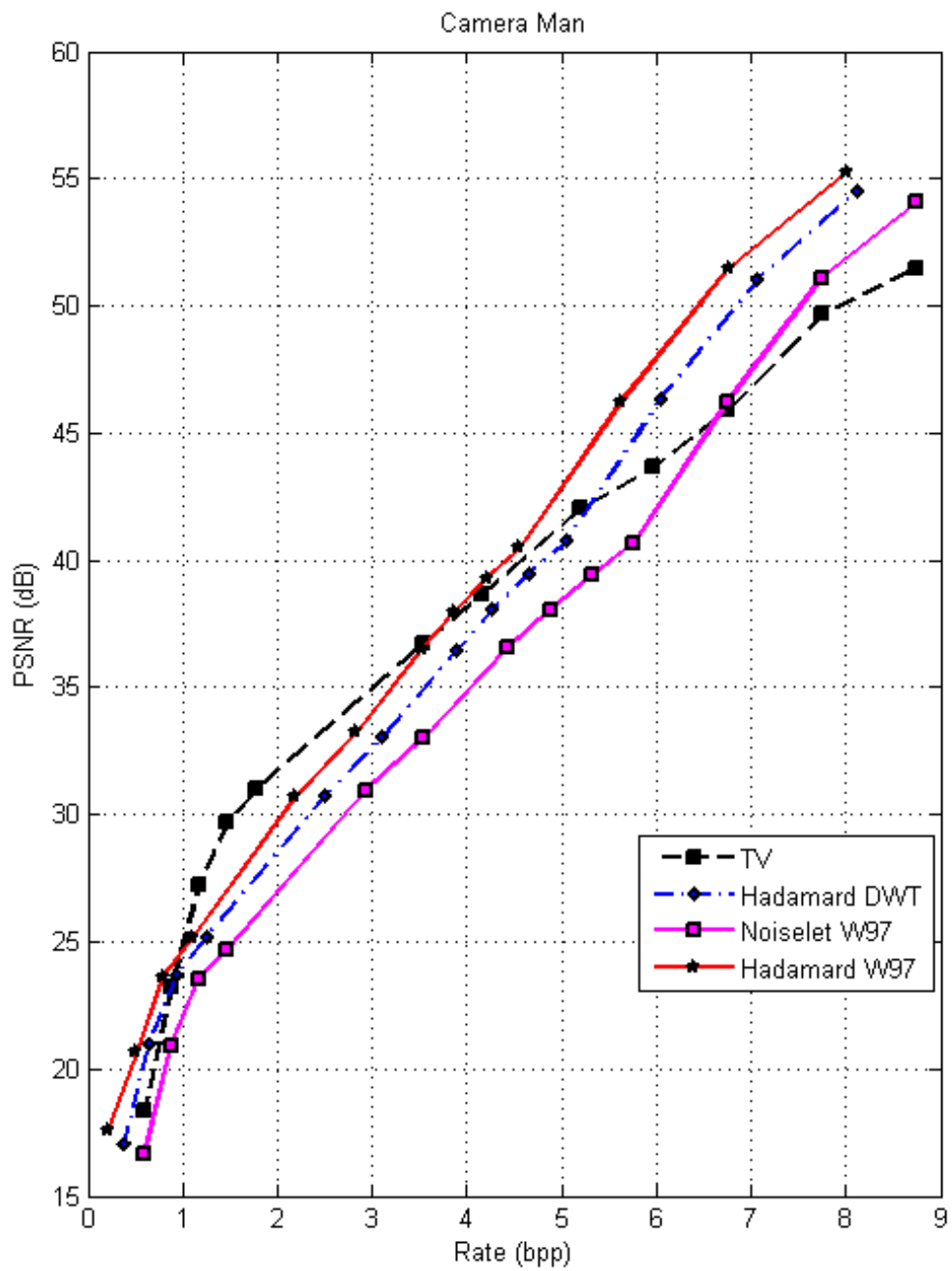


Figura 4.10

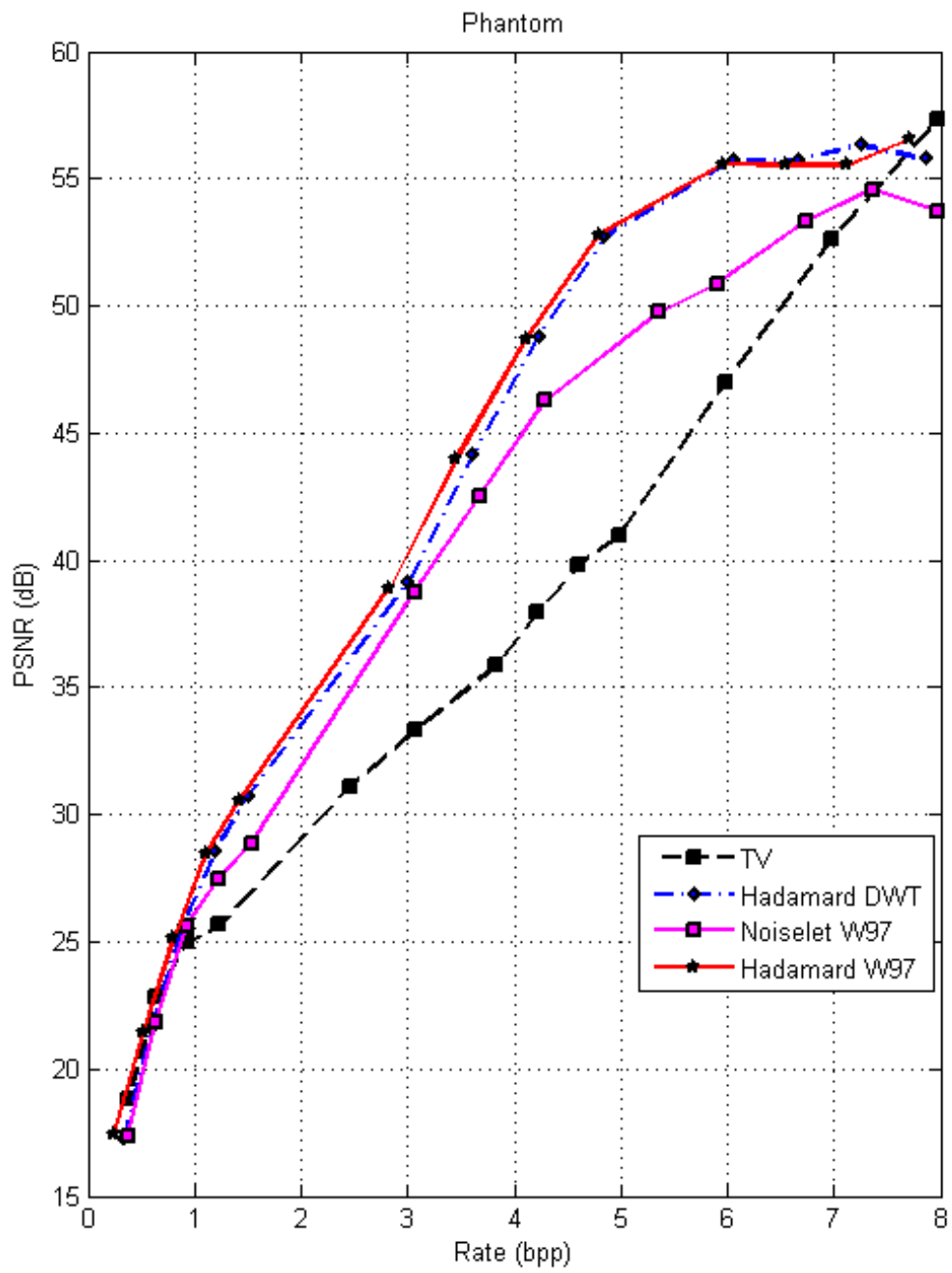


Figura 4.11

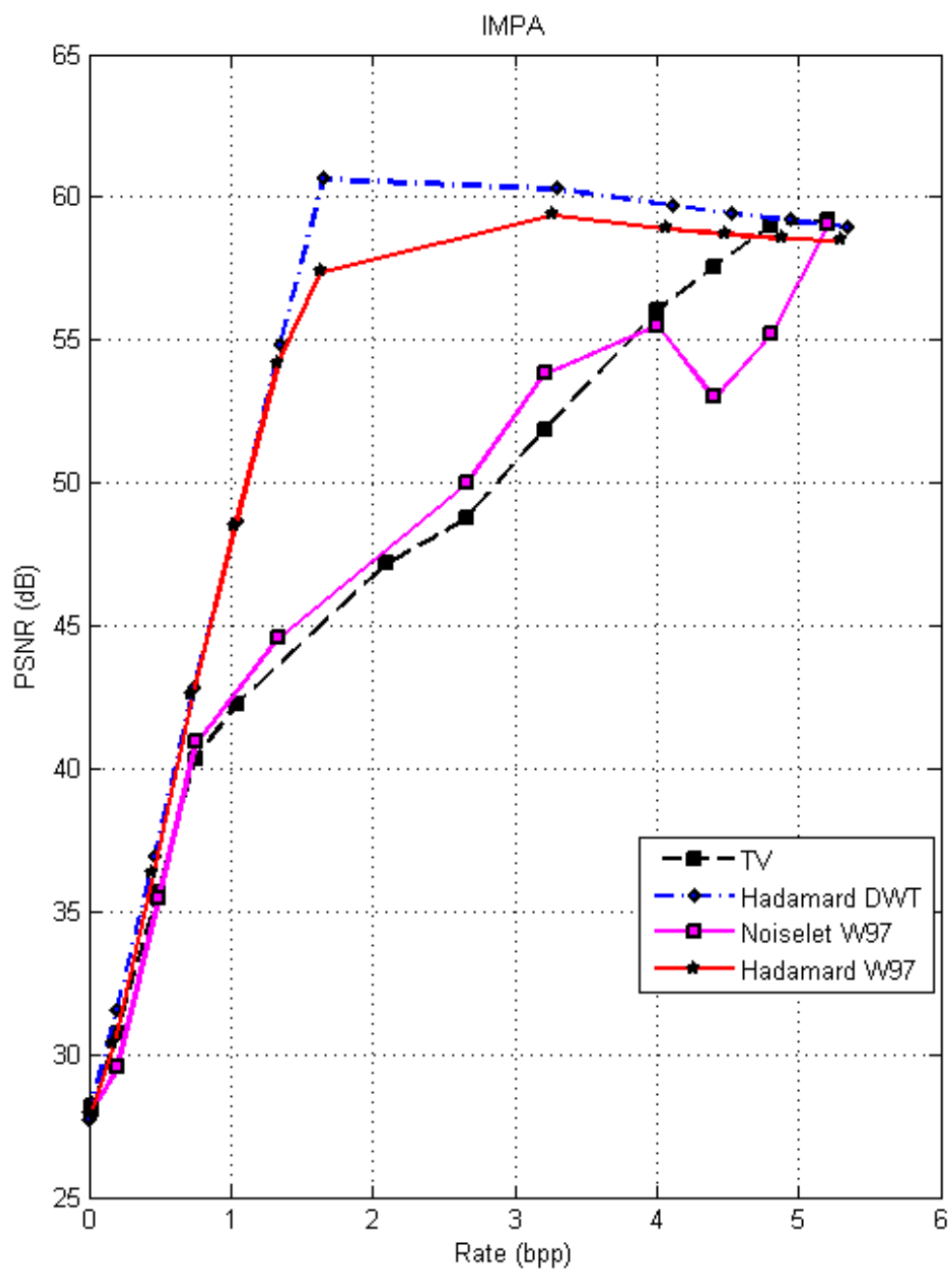


Figura 4.12

*Read, every day, something no one else is reading.
Think, every day, something no one else is thinking.
Do, every day, something no one else would be silly enough to do.
It is bad for the mind to continually be part of unanimity.*

Gotthold Ephraim Lessing

5

Conclusões

Nas condições experimentais utilizadas o desempenho da minimização da norma l_1 é melhorado em relação à utilização de Noiselets, ao utilizarmos as Equações (4.3) e (4.7) para determinar a matriz de amostragem Φ com máxima incoerência em relação à uma transformada Ψ que leva uma sinal x , que tem esparsidade K a um domínio onde o sinal é efetivamente esparso. Isto se deve ao aumento da incoerência entre Φ e Ψ , quando utilizado o método determinístico para a confecção da matriz de amostragem.

As abordagens com Ψ baseadas em DWT levam a melhores valores de $PSNR$ do que as com DCT para um mesmo bitrate. Esta característica pode ser explicada pela maior esparsidade do espectro das imagens quando calculado por transformada wavelet em relação ao espectro calculado por transformada DCT.

A abordagem com TV tem melhor desempenho para baixos bitrates nas imagens naturais. Isto pode ser explicado devido à maior suavidade das imagens naturais, que tem um espectro menos esparso que as imagens não-naturais estudadas. O espectro não tão esparso, leva a um pior desempenho da minimização da norma l_1 , o que não acontece com TV , que busca a minimização do gradiente da imagem e tem melhor adaptação a espectros menos esparsos como os de imagens naturais.

Com os resultados apresentados pudemos verificar que o aumento da incoerência

entre a matriz de amostragem e a transformada utilizadas leva a melhores desempenhos da minimização da norma l_1 e que este aumento da incoerência pode ser conseguido através de métodos determinísticos para a confecção de matrizes de amostragem.

Além disso, o uso de transformadas wavelets biortogonais mostrou-se com desempenho superior à utilização de transformadas wavelet ortogonais, para sinais quantizados.

Para trabalhos futuros pode-se tentar variar os valores da tolerância `pdtol` da minimização da norma l_1 . Outras transformadas biortogonais podem ser testadas, para se verificar qual pode levar a um melhor desempenho. Outras rotinas de minimização da norma l_1 podem ser testadas, como a `l1eq_qc`. Também pode ser testado o desempenho da minimização da norma l_1 com a imagem dividida em blocos.

Referências Bibliográficas

- [1] H. Nyquist. Certain topics in telegraph transmission theory. *Proceedings of the IEEE*, 90(2):280–305, Fevereiro 2002.
- [2] M. Vetterli, P. Marziliano, and T. Blu. Sampling signals with finite rate of innovation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 50(6):1417–1428, Junho 2002.
- [3] E. Candès, J. Romberg, and T. Tao. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. *IEEE Transactions on Information Theory*, 52(2):489–509, Fevereiro 2006.
- [4] R. Baraniuk. A lecture on compressive sensing. *IEEE Signal Processing Magazine*, 24(4):118–121, Julho 2007.
- [5] J. Romberg. Imaging via compressive sampling. *IEEE Signal Processing Magazine*, 25(2):14–20, Março 2008.
- [6] E. Candès and R. Wakin. An introduction to compressive sampling. *IEEE Signal Processing Magazine*, pages 21–30, Março 2008.
- [7] E. Candès and T. Tao. Decoding by linear programming. *IEEE Transactions on Information Theory*, 51(12):4203 – 4215, Dezembro 2005.
- [8] A. Schulz. Compressive sensing - novos paradigmas para aquisição de imagens. *Tese de Graduação em Engenharia Elétrica - UFRJ*, 2008.

- [9] E. Candès and J. Romberg. L1-magic. <http://www.l1-magic.org>. acessado em setembro de 2008.
- [10] R. Coifman, F Geshwind, and Y. Meyer. Noiselets. *Appl. Comp. Harmon. Anal.*, 10(1):27–44, 2001.
- [11] A. Schulz, L. Velho, and E. A. B. da Silva. Compressive sensing - basic principles on cs. (Lecture 3):34–35, Julho 2009. Apresentação.
- [12] T. C. Bell, J. G Cleary, and Ian H. Witten. *Text Compression*. Prentice-Hall Advanced Reference Series. Prentice-Hall PTR, Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1990.
- [13] D. Donoho, A. Maleki, and M. Shahram. Wavelab. <http://www-stat.stanford.edu/wavelab>. acessado em setembro de 2008.
- [14] P. Getreuer. Waveletcdf97. <http://www.mathworks.com/matlabcentral/xfiles/6449/1/content/waveletcdf97/doc/waveletcdf97.html>. acessado em agosto de 2009.